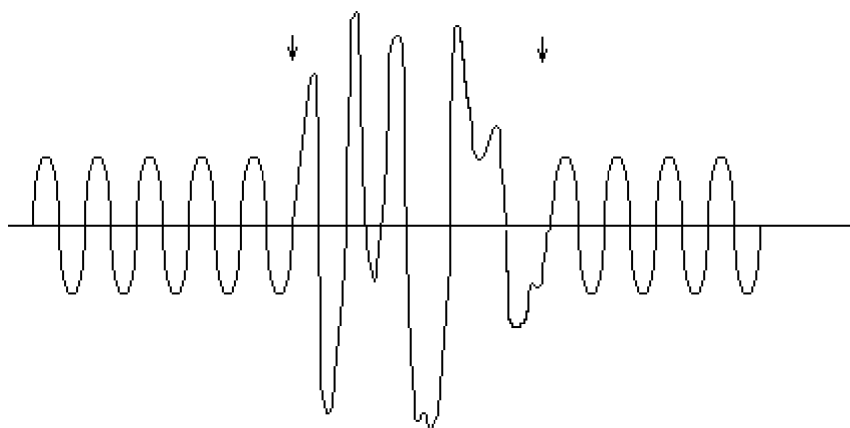


Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники

В. С. Баушев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ**

Учебное пособие



Томск 2012

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники

В. С. Баушев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Учебное пособие

Томск 2012

Настоящее пособие составляет существенную часть курса «Системы Автоматизированного Проектирования Электронных Схем (САПР ЭС)», входящего в специальную теоретическую подготовку студентов кафедры «Промышленная электроника» ТУСУР. Рассматриваются вопросы реализации динамических математических моделей электронных схем и возможности автоматизации этого процесса. Акцент сделан на проблемные моменты. Пособие содержит как базовый теоретический материал, так и результаты исследований проведенных автором совместно с сотрудниками кафедры в 1980-1990-х гг. Изложенный материал сориентирован на разработчиков электронного оборудования, специалистов в области моделирования динамических систем, студентов профильных специальностей

Издание третье, дополненное и исправленное (первое издание - 1995 г., второе – 2002 г.).

Третье издание к публикации подготовил к.т.н. Ю.Н. Тановицкий

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	2
2. Формирование математических моделей	4
2.1. Принципы формирования математических моделей	4
2.2. Возможность автоматизации формирования математических моделей	8
3. Принципы реализации математических моделей	11
3.1. Этапы реализации. Анализ	11
3.2. Классификация движений динамической системы	14
4. Теория устойчивости	20
4.1. Постановка проблемы. Понятие области притяжения.....	20
4.2. Теория локальной устойчивости	23
4.3. Автономные системы	29
5. Методы поиска стационарных решений	31
6. Численные методы реализации математических моделей	36
6.1. Проблема собственных чисел	36
6.2. Некоторые схемы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений	40
6.2.1. Простейшие схемы численного интегрирования. Понятие аппроксимации	40
6.2.2. Устойчивость численных схем.....	45
6.2.3. Схемы Рунге-Кутты и разностные схемы	47
7. Динамика стабилизатора с широтно-импульсным регулированием и хаос в динамических системах	52
7.1. Структура стабилизатора, математическая модель и результаты расчетов задачи Коши	52
7.2. Преобразования модели	59
7.3. Анализ картины ветвления	64
7.4. Численные эксперименты и возможная причина возникновения хаотической динамики	68
7.5. Анализ отображения Фейгенбаума	74
7.6. Причины возникновения хаотической динамики в отображении Фейгенбаума	84

7.7.	К динамике стабилизатора	89
7.8.	Понятие нормальных и аномальных структур	95
8.	Заключение	98
	Литература	99

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составляет существенную часть курса «Системы Автоматизированного Проектирования электронных схем» (САПР ЭС), входящего в специальную теоретическую подготовку студентов кафедры «Промышленная электроника» (ПрЭ) ТУСУР.

В принципе возможны различные подходы к построению такого курса. Можно, например, выбрать за основу один из многочисленных пакетов программ отечественного или зарубежного производства и построить курс на освоении этого пакета и проектировании с его помощью простейших объектов. Но возможен и другой путь - дать общее представление о проектировании на основе математического моделирования, не привязываясь к конкретному пакету. Именно этот путь реализован на кафедре ПрЭ. Преимущество такого подхода, во-первых, в том, что с общих позиций легко освоить конкретную систему. Во-вторых, легче ориентироваться в формирующемся рынке пакетов программ. Наконец, самое главное - для студентов, склонных к научным исследованиям, предлагаемый курс дает ясно понять, что не все так просто с автоматизацией. Наличие даже самых современных ЭВМ - не гарантия успеха в получении хороших пакетов автоматизации проектирования.

В самом общем виде математическое моделирование - это:

- создание абстрактного аналога реального объекта (схемы замещения и математической модели);
- получение той или иной информации об этом идеализированном объекте (реализация модели).

Под реальным объектом понимается:

- нечто реально существующее как целостная система (например, действующий прибор, экологическая система, система кровообращения и т.д.);
- нечто не существующее, но подлежащее созданию.

В последнем случае говорят о проектировании. Процесс проектирования включает в себя в два этапа:

- 1) выбор структуры объекта, то есть совокупности определенным образом соединенных между собой элементов;
- 2) подбор параметров элементов с точки зрения удовлетворения данным технического задания.

Именно на втором этапе проектирования приходится иметь дело с математическим моделированием. Вполне естественно, что пособие начинается с изучения принципов математического моделирования (п.п. 2.3). С реализацией математических моделей связано содержание п.п. 5.6. Нетрадиционно излагается теория устойчивости (п. 4): исследуется устойчивость не произвольного движения, а вполне конкретного - стационарного (статического или периодического типа). Такой подход, по мнению автора пособия, способствует более ясному пониманию сущности теории устойчивости и усвоению дальнейшего содержания пособия.

Малое количество примеров в пособии компенсируется выполнением индивидуальных заданий и курсовых проектов в процессе обучения. В какой-то части указанный недостаток компенсируется последним (п. 7) разделом, в котором проведен детальный анализ динамики стабилизатора с ШИМ. Содержание этого раздела интересно еще и тем, что в нем показаны причины возникновения хаотической динамики. Выяснение этих причин, естественно, привело к понятию нормальных и аномальных структур, и к пониманию, с чем связано качество проектирования.

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Принципы формирования математических моделей

Под формированием математических моделей понимается совокупность действий, конечным результатом которых является математическая модель. В общем виде процесс формирования математических моделей представляется в виде схемы



Как уже упоминалось во введении, реальный объект либо существует, либо, если речь идет о проектировании, представляется умозрительно. Схематизация начинается с выделения элементов объекта и структуры с использованием приемов абстракции, приводящих к допущениям. Схема замещения является идеальным образом реального объекта и представляет собой структурно организованное множество элементов. В процессе формирования схемы замещения и математической модели происходит выделение параметров объекта Π и характеризующих его величин X . При схематизации объектов электроники выделяются резистивные, емкостные, индуктивные элементы, источники напряжения, источники тока, диоды, транзисторы, тиристоры и т.д. В качестве элементов можно рассматривать выпрямители, стабилизаторы, фильтры, операционные усилители и прочие устройства, являющиеся подсистемами более сложных устройств. Структура же определяется способом соединения этих элементов.

Схематизация объекта позволяет перейти непосредственно к формированию математической модели. При этом используются законы природы. Это могут быть фундаментальные законы сохранения массы и

энергии, законы Ньютона, либо их модификации. Но это могут быть и некоторые эмпирические закономерности. Например, при формировании математической модели движения жидкости используются указанные выше фундаментальные законы и эмпирический закон в форме уравнения состояния, связывающего плотность, давление и температуру [1]. Математическая модель распределения температуры в некотором объеме формируется на основе закона сохранения энергии и эмпирического закона Фурье, связывающего поток тепла и градиент температуры [2]. Формирование математических моделей устройств электроники основано на известных элементарных соотношениях, связывающих токи i_L , i_C , i_R и напряжения U_L , U_C , U_R на индуктивных, емкостных и резистивных элементах

$$L \frac{di_L}{dt} = U_L, \quad C \frac{dU_C}{dt} = i_C, \quad Ri_R = U_R$$

и двух законах Кирхгоффа.

Математическая модель - это совокупность отношений, связывающих характеризующие объект величины X .

Величины X могут либо меняться во времени, либо оставаться неизменными. В соответствии с этим модели могут быть динамическими

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X), \tag{2.1}$$

$$\frac{dX}{dt} = G(X) \tag{2.2}$$

либо нединамическими

$$G(t, X) = 0, \tag{2.3}$$

$$G(X) = 0. \tag{2.4}$$

Здесь X , G - одностолбцовые матрицы

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T, \quad G = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T.$$

Индекс " T " означает транспортирование. Часто X и G называют векторами. Однако используя понятия матрицы и вектор, не следует забывать о различии операции над этими объектами.

Относительно форм записи моделей в виде (2.1)-(2.4) сделаем ряд замечаний.

1. Предполагается включенность параметров Π в эти модели.
2. Величины X могут зависеть не только от времени, но и от пространственных переменных. В этом случае предполагается, что оператор G включает в себя эти переменные, в том числе частные производные по ним.
3. Казалось бы логичным модели вида (2.3) отнести к динамическим, так как величины X зависят от времени. Однако отличие (2.3) от динамической модели заключается в отсутствии инерционности, поскольку зависимость от времени устанавливается мгновенно. Если считать t параметром, то модели (2.3), (2.4) идентичны.
4. Существуют объекты, математические модели которых соответствуют виду (2.1), (2.2). В то же время есть объекты, для которых запись модели в таком виде затруднительна. В этом случае (2.1), (2.2) следует воспринимать как символическую запись модели объекта.
5. Динамические модели в дальнейшем будем называть динамическими системами.
6. Для моделей вида (2.1) будем предполагать выполнение условия

$$G(t + T) \equiv G(t, X) \quad (2.5)$$
 и называть их динамическими системами с внешним периодическим воздействием.
7. Динамические системы вида (2.2) называют автономными системами.

Пример 2.1. Сформируем модель следующей цепи

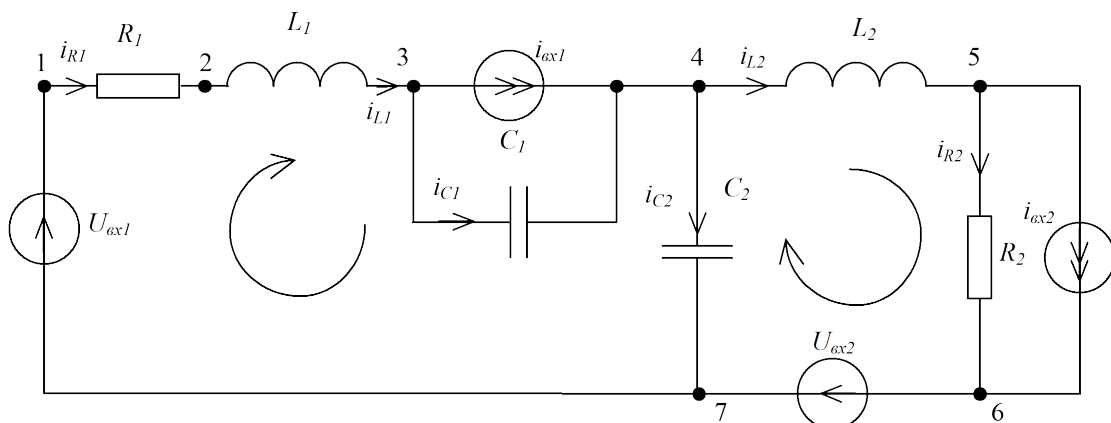


Рис. 2.1.

Запишем элементные соотношения и законы Кирхгофа в соответствии с выбранными направлениями токов и направлением обхода контуров:

$$\begin{aligned}
 L_1 \frac{di_{L1}}{dt} &= U_{L1}, L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = U_{L2}, C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = i_{C1}, C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = i_{C2}, \\
 R_1 i_{R1} &= U_{R1}, R_2 i_{R2} = U_{R2}, i_{R1} = i_{L1}, i_{L1} = i_{C1} + i_{вх1}, \\
 i_{вх1} + i_{C1} &= i_{C2} + i_{L2}, i_{L2} = i_{R2} + i_{вх2}, \\
 U_{R1} + U_{L1} + U_{C1} + U_{C2} &= U_{вх1}, U_{L2} + U_{R2} - U_{C2} = U_{вх2}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

В качестве величин, характеризующих объект, выберем токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, т.е.

$$x_1 = i_{L1}, x_2 = i_{L2}, x_3 = U_{C1}, x_4 = U_{C2}.$$

Проведя преобразования с моделью (2.6), получим

$$\frac{dX}{dt} = AX + B,$$

$$A = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & 0 & 1/L_2 \\ 1/C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/C_2 & -1/C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} U_{вх}/L_1 \\ (R_2 i_{вх2} + U_{вх2})/L_2 \\ -i_{вх1}/C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Математическая модель будет иметь вид (2.1) или (2.2), если обозначить $G=AX+B$. Если $B=B(t)$, т.е. задано переменное внешние воздействие, то

модель имеет вид (2.1). Если внешнее воздействие постоянно, т.е. $B = const$, то модель имеет вид (2.2). Параметры модели:

$$\Pi = \{L_1, L_2, R_1, R_2, C_1, C_2, \Pi_{ex}\}.$$

Здесь под Π_{ex} имеются в виду параметры входных воздействий.

Уберем теперь индуктивные и емкостные элементы в схеме замещения рис. 2.1, полагая $L_1, L_2, C_1, C_2 = 0$. Модель примет вид

$$A_1 X + B_1 = 0$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -R_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} U_{ex1} \\ R_2 i_{ex2} + U_{ex2} \\ -i_{ex1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Обозначая $A_1 X + B_1 = G$, приходим к выводу, что модель имеет вид (2.3), если $B_1 = B_1(t)$ и вид (2.4), если $B_1 = const$.

2.2. Возможность автоматизации формирования математических моделей

В случае небольшого числа элементов, как это было в примере 2.1, формирование модели не вызывает особых затруднений. Но трудности будут нарастать с ростом числа элементов. В этой ситуации, естественно, возникает мысль использовать для формирования модели ЭВМ.

Пусть цепь содержит N_L индуктивных, N_C емкостных, N_R резистивных элементов, N_I источников тока, N_U источников напряжения. Элементные соотношения в матричной форме

$$L \frac{dI_L}{dt} = U_L, C \frac{dU_C}{dt} = I_C, RI_R = U_R, \quad (2.7)$$

где

$$L = diag(L_1, L_2, K, L_{NL}), C = diag(C_1, C_2, K, C_{NC}), R = diag(R_1, R_2, K, R_{NR}),$$

$$I_L = [i_{L1}, i_{L2}, K, i_{L,NL}]^T, U_L = [U_{L1}, U_{L2}, K, U_{L,NL}]^T,$$

$$I_C = [i_{C1}, i_{C2}, K, i_{C,NC}]^T, U_C = [U_{C1}, U_{C2}, K, U_{C,NC}]^T,$$

$$I_R = [i_{R1}, i_{R2}, K, i_{R,NR}]^T, U_R = [U_{R1}, U_{R2}, K, U_{R,NR}]^T.$$

Пусть NZ, NK соответственно, число узлов и число контуров, для которых выписываются 1-й и 2-й законы Кирхгофа. В матричном виде эти законы примут вид

$$\begin{aligned} E_L I_L + E_C I_C + E_R I_R &= E_I I_{\text{ex}}, \\ D_L U_L + D_C U_C + D_R U_R &= D_U U_{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $I_{\text{ex}}, U_{\text{ex}}$ - одностолбцовые матрицы, элементами которых являются входные токи и напряжения.

$$I_{\text{ex}} = [i_{\text{ex}1}, i_{\text{ex}2}, K, i_{\text{ex},NI}]^T, U_{\text{ex}} = [U_{\text{ex}1}, U_{\text{ex}2}, K, U_{\text{ex},NU}]^T.$$

Матрицы группы E и группы D называются топологическими матрицами. Элементами этих матриц являются числа 0, 1, -1, а их размерности

$$\begin{aligned} E_L(NZ, NL), E_C(NZ, NC), E_R(NZ, NR), E_I(NZ, NI), \\ D_L(NK, NL), D_C(NK, NC), D_R(NK, NR), D_U(NK, NU). \end{aligned}$$

Для примера 2.1 $NL, NC, NR, NI, NU=2; NZ=4; NK=2;$

$$\begin{aligned} E_L &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D_L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В общем случае процесс формирования модели сводится к следующим действиям:

1. Ввести в ЭВМ структуру цепи. Например, для схемы замещения рис. 2.1, где предварительно пронумерованы все узлы, структуру можно ввести в виде трех массивов

2	4	3	4	1	5	3	5	1	7
L_1	L_2	C_1	C_2	R_1	R_2	$i_{\text{ex}1}$	$i_{\text{ex}2}$	$U_{\text{ex}1}$	$U_{\text{ex}2}$
3	5	4	7	2	6	4	6	7	6

Средний массив из строчных переменных означает тип элемента, два другие содержат номера узлов, соответствующие каждому элементу.

2. Вычислить NZ и NK .
3. Рассчитать топологические матрицы.
4. Преобразовать модель (2.7), (2.8) к виду (2.1).

В принципе все эти этапы формирования модели алгоритмизуемы. Если цепь содержит более сложные элементы (транзисторы, тиристоры, трансформаторы и т.д.), то можно использовать схемы замещения этих элементов из двухполюсных компонент.

Существует обширная литература по автоматизации формирования моделей электронных схем (см., например, [4-6]). Алгоритмы формирования моделей базируются на различных подходах и, как правило, являются составной частью систем анализа. Естественно, при любом подходе возникают определенные трудности. Во-первых, это трудности, связанные с отбраковкой неработоспособных структур. Во-вторых, в силу ограниченности памяти и быстродействия ЭВМ, возникают ограничения на число элементов. Наконец, это трудности, связанные с проблемой адекватности, то есть соответствия процессов на модели тем процессам, которые проявляются в реальном объекте. Развитие автоматизации формирования моделей связано с преодолением указанных трудностей. Что касается автоматизации формирования моделей любых объектов - говорить на эту тему просто преждевременно ввиду отсутствия общей теории схематизации реальных объектов, хотя попытки в этом направлении имеются [7].

3. ПРИНЦИПЫ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Этапы реализации. Анализ

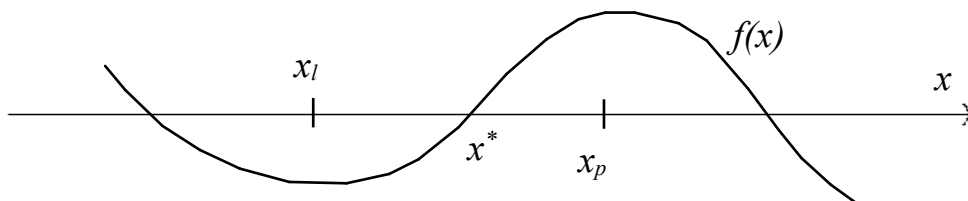
После того, как модель сформирована, возникает необходимость ее реализации.

Реализация модели - это получение определенной информации об объекте.

Прежде чем выделить этапы реализации, рассмотрим простой пример. Предположим, что математическая модель получена в виде трансцендентного уравнения

$$f(x) = 0. \quad (3.1)$$

Это модель вида (2.4). В общем случае уравнение (3.1) может иметь неединственный корень. Поэтому, прежде всего, надо выбрать какой из них следует найти. Далее надо провести исследование с целью локализации нужного корня, то есть выделить некоторую область (x_l, x_p) , внутри которой находится интересующий нас корень.



Теперь можно приступить к выбору метода расчета корня. Наиболее простой из них - метод деления отрезка пополам, или метод дихотомии. Простота этого метода определяется тем, что для его использования достаточно минимальной информации о поведении $f(x)$ в области (x_l, x_p) . А именно, $f(x)$ должна быть ограничена и $f(x_l) \cdot f(x_p) < 0$. По существу все методы решения уравнения (3.1) приводят к построению последовательности

$$x_0, x_1, K, \rightarrow x^*. \quad (3.2)$$

Причем первый член последовательности x_0 задается. В методе дихотомии нахождение членов этой последовательности осуществляется по схеме

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{lk} + x_{pk}), \quad (3.3)$$

$$x_{pk} - x_{lk} < \delta |x_k|$$

$$x_{l,k+1} = \begin{cases} x_k, & f(x_k)f(x_{lk}) > 0 \\ x_{lk}, & f(x_k)f(x_{lk}) \leq 0 \end{cases}$$

$$x_{p,k+1} = \begin{cases} x_k, & x_{l,k+1} = x_{lk} \\ x_{pk}, & x_{l,k+1} = x_k \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, K; x_{l0} = x_l, x_{p0} = x_p$$

Выполнение неравенства во второй строке (3.3) означает окончание итерационного процесса. Выбор δ определяет относительную точность вычисленного корня.

В принципе существует бесконечное множество методов построения последовательности (3.2). Например, представим уравнение (3.1) в виде

$$x = x + g(x)f(x).$$

Это уравнение эквивалентно (3.1), если $g(x) \neq 0$ в окрестности искомого корня. Построение последовательности (3.2) можно делать по схеме

$$x_{k+1} = x_k + g(x_k)f(x_k), k = 0, 1, K \quad (3.4)$$

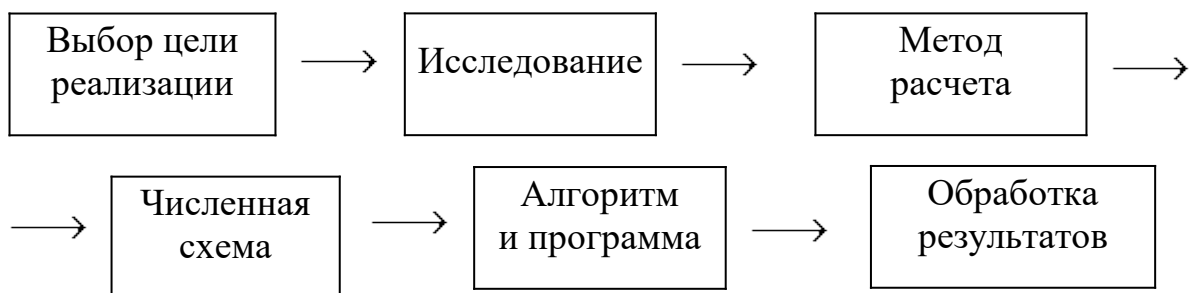
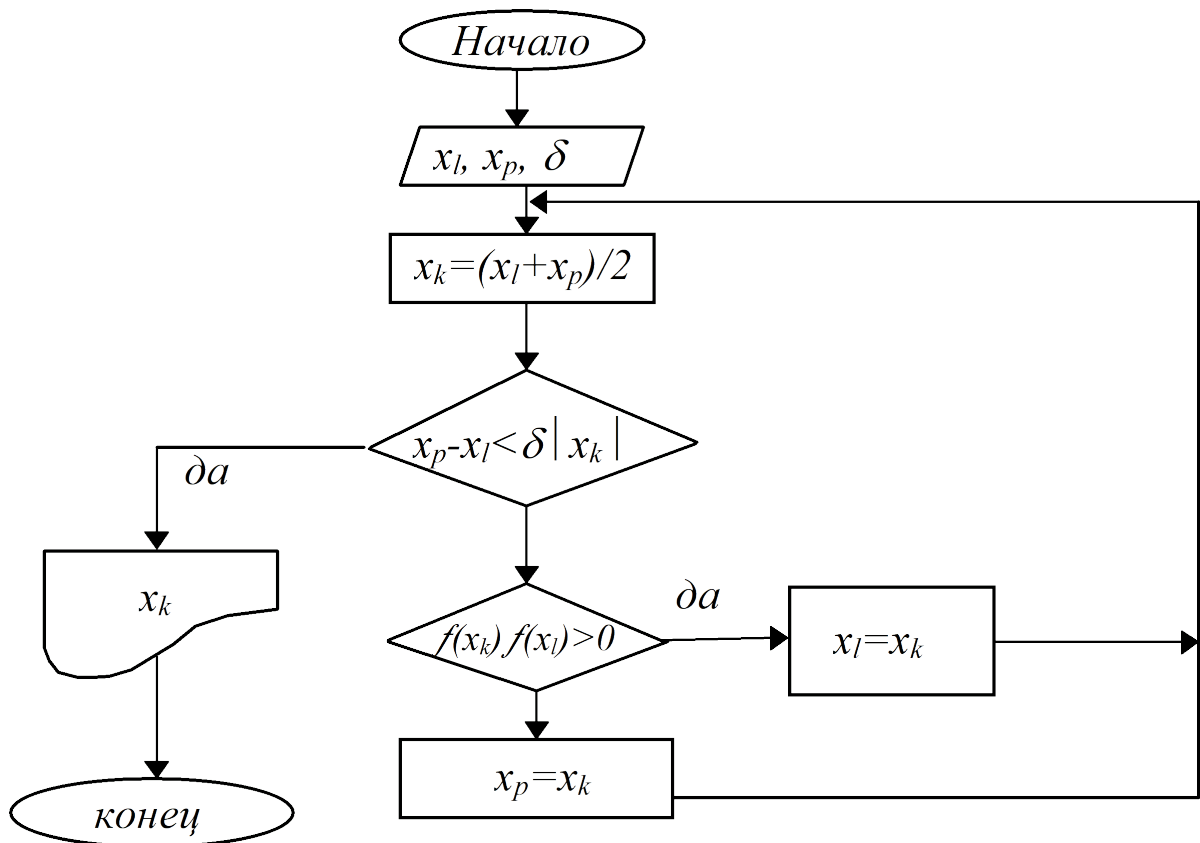
Если $g(x) = -1/f'(x)$, то схема (3.4) соответствует методу Ньютона. При выборе того или иного метода руководствуются его простотой и скоростью сходимости. Известно, что метод Ньютона обладает большей сходимостью по отношению к методу дихотомии. Однако для его использования надо больше информации относительно $f(x)$, чем при использовании метода дихотомии.

Численная схема (3.3) позволяет перейти к построению алгоритма нахождения корня. Этот алгоритм удобно представить в виде блок-схемы.

При этом используются стандартные символы, установленные ГОСТ 19003-80.

С помощью блок-схемы можно написать программу на любом языке программирования. Далее эта программа отлаживается и делаются расчеты.

Рассмотренный пример позволяет четко выделить все этапы реализации модели.



Выбор цели определяется желанием получить конкретную информацию об объекте. Этап исследования связан с выбором того или иного метода.

Каждая реализация модели позволяет получить интересующую нас информацию об объекте.

Анализ - это многократная реализация модели с целью получения всей необходимой информации об объекте.

Важно помнить о том, что и реализация модели (как часть анализа) и анализ проводятся при фиксированном наборе параметров. Автоматизация процесса анализа, конечно же, связана с возможностью автоматизации модели.

3.2. Классификация движений динамической системы

Рассмотренный пример был чрезвычайно прост в отношении цели реализации - найти величину корня уравнения (3.1). Модели реальных объектов электроники (и не только!) в этом отношении гораздо сложнее. Поэтому вопрос о выборе целей реализации требует специального рассмотрения.

Прежде всего, необходимо отметить, что в дальнейшем мы будем акцентировать внимание на динамических системах (2.1) с условием (2.5), и (2.2). Это связано с тем, что, во-первых, именно к этим системам зачастую сводится изучение процессов в электронных устройствах; во-вторых, модели (2.3), (2.4) можно свести к моделям (2.2); наконец, реализация моделей (2.1), (2.2) для некоторых целей сводится к реализации моделей (2.4).

Под мгновенным состоянием динамической системы понимается $X(t)$ в фиксированный момент времени. Под динамическим состоянием (в дальнейшем просто состоянием) или движением или динамикой будем понимать поведение $X(t)$ в некотором временном интервале, в частности, сколь угодно большом.

Термин «поведение» предполагает наличие какого-то критерия, позволяющего различать движения. В качестве такого критерия используется понятие стационарность - нестационарность. Под стационарным понимается такое состояние, когда характеризующие

объект величины (компоненты вектора $X(t)$) либо не меняются во времени (стационарные состояния статического типа), либо меняются периодически (стационарные состояния периодического типа). Все остальные состояния назовем нестационарными.

Следует заметить, что в научной и учебной литературе часто стационарные движения статического типа называют просто стационарными, а периодического типа - периодическими.

С точки зрения наблюдателя возможны различные варианты движений, начиная с некоторого начального момента времени t_0 и начального состояния $X(t_0)$.

1. Начиная с некоторого условно определяемого момента времени $t_p > t_0$ устанавливается одно стационарное состояние, которое будем обозначать X_c , и не меняется сколь угодно долго.

Во временном интервале (t_0, t_p) имеет место нестационарное состояние, которое называют переходным, если оно заканчивается установлением стационарного состояния. Рис. 3.1,а отражает установление к стационарному состоянию статического типа, а рис. 3.1,б - к стационарному состоянию периодического типа. Вертикальная ось соответствует одной из компонент вектора X .

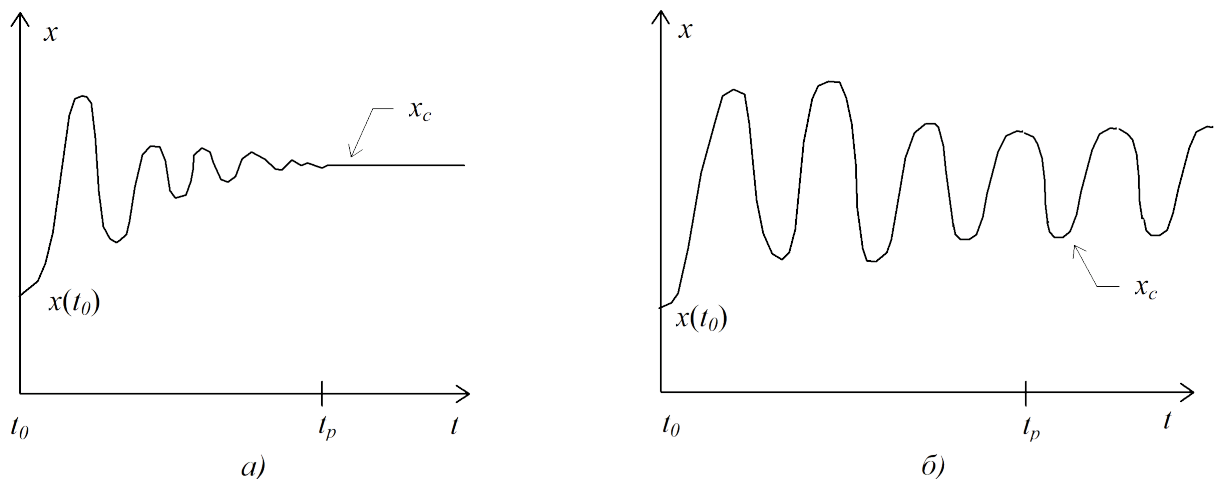


Рис. 3.1.

Возвращаясь к вопросу о целях реализации, заметим, что их можно классифицировать по признаку состояния объекта. В переходном процессе в качестве целей реализации может выступить, например, длительность переходного процесса, экстремальные значения $x(t)$, наличие колебаний и т.д.. Поскольку проектируемое устройство обычно функционирует в стационарном состоянии, очень важны цели реализации, связанные с этим состоянием - амплитуды колебаний (если они есть), средние значения, спектральный состав, потребляемая мощность, коэффициент полезного действия и т.д.

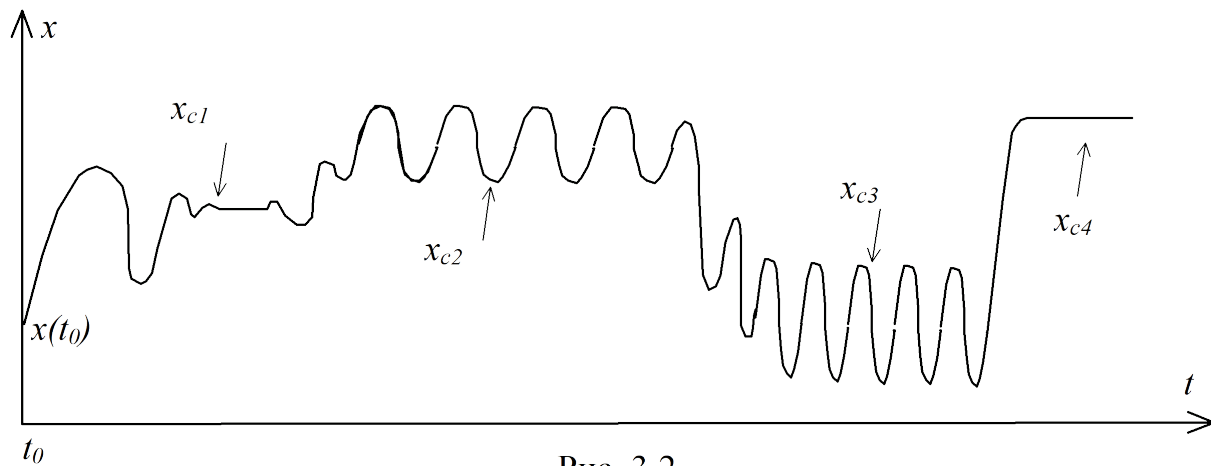


Рис. 3.2.

2. Другой вариант движений можно характеризовать как чередование нестационарных и стационарных состояний. Причем возможно установление различных стационарных состояний. Этот вариант иллюстрирует рис. 3.2.

3. Возможен вариант, когда никакое стационарное состояние не устанавливается сколь угодно долго (рис. 3.3).

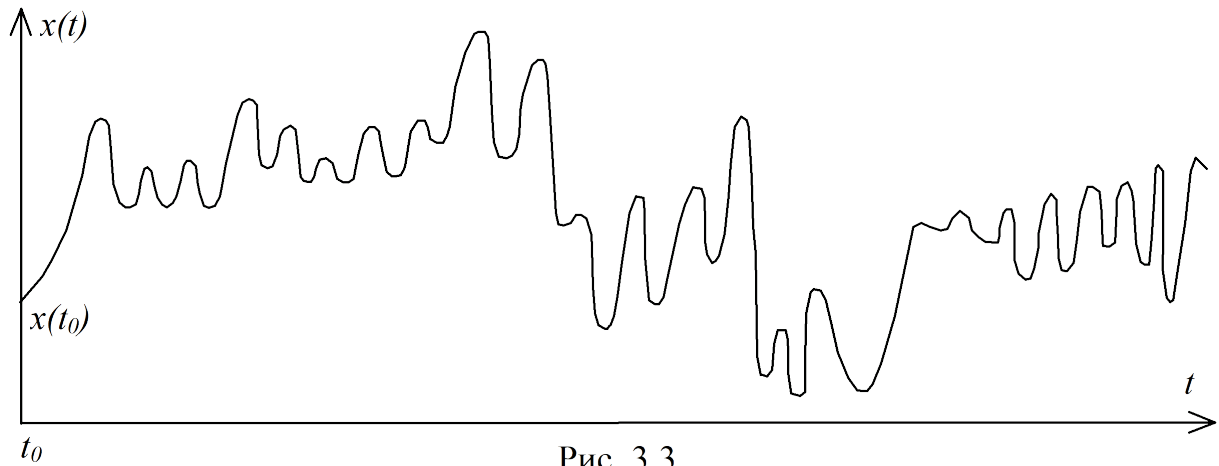


Рис. 3.3.

Будем говорить, что в первом случае имеет место детерминированная или регулярная динамика, а в других - недетерминированная.

Отметим существенное различие детерминированной и недетерминированной динамики. В первом случае, начиная, по крайней мере, с $t > t_p$ можно предсказать поведение динамической системы. В двух других случаях поведение динамической системы не всегда может быть предсказуемо. Если в случае недетерминированной динамики $X(t)$ является случайным, то говорят, что имеет место стохастическая динамика. Интуитивно ясно, что должна существовать какая-то мера или степень стохастичности. Но ввести эту меру далеко не простая задача. Однако важным представляется не столько оценка степеней стохастичности, сколько осознание факта существования предельной степени стохастичности, или крайней степени недетерминированности. А в качестве оценки такой динамики можно выбирать автокорреляционную функцию.

$$\Phi(\tau) = \frac{E_{\tau}(x(t+\tau))E_{\tau}(x(t)) - E_{\tau}(x(t+\tau)x(t))}{D_{\tau}(x(t+\tau))D_{\tau}(x(t))}.$$

Здесь E_{τ} , D_{τ} , соответственно, математическое ожидание и дисперсия. Для предельной степени стохастичности $\Phi(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$. Однако расчет автокорреляционной функции обычно требует больших затрат машинного времени. В настоящее время развитые средства вывода информации позволяют судить о такой динамике визуально.

Наряду с понятием стохастической динамики широко используется термин хаотическая динамика. По существу хаотическая динамика - это вариант случайной, стохастической динамики. Дело в том, что стохастическая динамика может быть результатом внешних случайных факторов, действующих на объект. Динамическую систему при этом естественно, называют недетерминированной. Если же стохастичность есть самопорождение детерминированной динамической системы, то движение называют хаотическим. При этом априори допускается возможность таких движений. С точки зрения обычного понимания хаоса (абсолютный беспорядок) мы здесь под хаотическим будем понимать движение с предельной степенью стохастичности.

Стохастическая и хаотическая динамика возникает в объектах самой различной природы. Например, хаотическую динамику жидкости или газа называют турбулентной [1]. Хаотическую динамику миокарда (сердечной мышцы) в кардиологии называют фибрилляцией. Во многих случаях крайне нежелательно, чтобы объект функционировал в хаотическом режиме. Например, турбулентное движение крови в кровеносных сосудах приводит к образованию тромбов. Наличие последних может привести к закупорке сосудов, что является причиной возникновения тяжелых заболеваний. Внезапно возникшая фибрилляция миокарда приводит к таким нарушениям гемодинамики (движения крови), что, если не принять мер, человек быстро умирает. Возникновение турбулентного движения газа на поверхности летательных аппаратов (самолетов, ракет) приводит к резкому возрастанию коэффициента сопротивления по сравнению с ламинарным (детерминированным) движением, что сказывается на затратах топлива.

Что касается устройств электроники, то, если спроектированный объект имеет склонность к хаотической динамике, он либо нежизнеспособен, либо его выходные характеристики будут весьма далеки от требований технического задания. Поэтому очень важно, прежде всего, разобраться в причинах возникновения стохастических и хаотических движений, чтобы принять меры к их устранению. Решение этой проблемы

самым тесным образом связано с вопросами устойчивости, которые рассматриваются дальше.

4. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

4.1. Постановка проблемы. Понятие области притяжения

Пусть динамическая система находится в стационарном состоянии. Поскольку в реальных условиях на нее действуют различные возмущающие факторы, либо создаваемые искусственно, либо в виде случайных помех, возникает вопрос - как будет себя вести динамическая система после окончания возмущающего фактора? Очевидны два варианта ответа на этот вопрос - динамическая система либо вернется в стационарное состояние, либо не вернется. Для получения определенного ответа на этот вопрос была создана теория устойчивости, у истоков которой в поле зрения наших современников стоят два математика - А.М. Ляпунов и А. Пуанкаре.

Рассмотрим сначала динамические системы с внешним периодическим воздействием

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X), \quad G(t + T, X) \equiv G(t, X). \quad (4.1)$$

Пусть X_c - стационарное решение (движение), то есть

$$\frac{dX_c}{dt} \equiv G(t, X_c), \quad X_c(t + T) \equiv X_c(t) \quad (4.2)$$

Величина T в (4.1) и (4.2) может быть различна. В дальнейшем, если особо не оговаривается, под T понимается период $X_c(t)$.

Пусть X - возмущенное движение и пусть

$$X = X_c + \varepsilon, \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]^T.$$

Вектор ε называют возмущением. Подставляя возмущенное решение в (4.1) и используя (4.2), относительно возмущения получим систему

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = G(t, X_c + \varepsilon) - G(t, X_c). \quad (4.3)$$

Пусть в начальный момент времени $t=t_0$

$$\varepsilon(t_0) = X_0 - X_c(t_0) = \varepsilon_0, \quad X_0 = X(t_0). \quad (4.4)$$

Величина $\|\varepsilon_0\|$ характеризует степень отклонения возмущенного движения от стационарного в момент времени t_0 , соответствующий окончанию действия возмущающего фактора.

Замечание 4.1. Под знаком « $\|\cdot\|$ », если на месте « $*$ » находится вектор, понимается любая из норм, которые можно ввести на множестве векторов. Если на месте « $*$ » находится матрица - какая-либо матричная норма. Предполагается согласованность векторной и матричной норм [8].

Стационарному решению X_c в пространстве переменных X соответствует стационарное решение $\varepsilon_c = 0$ в пространстве переменных ε .

Определение 4.1. Совокупность (X_0, t_0) в пространстве (X, t) , обеспечивающих для решения Коши (4.3), (4.4)

$$\|\varepsilon\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

назовем областью притяжения стационарного решения X_c и обозначим D_x .

Если D_x не совпадает с пространством (X, t) , она имеет границу $\Gamma_x(t)$. Можно показать, что $\Gamma_x(t+T) \equiv \Gamma_x(t)$. Области D_x в пространстве (ε, t) соответствует область притяжения D_ε стационарного решения $\varepsilon_c = 0$. Если существует Γ_x , то область D_ε имеет границу $\Gamma_\varepsilon(t)$, соответствующую Γ_x и $\Gamma_\varepsilon(t+T) \equiv \Gamma_\varepsilon(t)$. Проекцию D_ε на пространство переменных ε обозначим D . При наличии границы $\Gamma_\varepsilon(t)$ область D будет иметь периодически меняющуюся границу Γ и $D(t+T) \equiv D(t)$, $\Gamma(t+T) \equiv \Gamma(t)$. Обычно под областью притяжения стационарного движения понимают любую из областей D_x , D_ε , D . Из соображений наглядности в дальнейшем под областью притяжения будем иметь в виду D .

Замечание 4.2. Мы не будем здесь затрагивать вопросы топологии введенных областей притяжения и ограничимся лишь рассмотрением возможных вариантов области D .

На рис. 4.1 условно изображены варианты областей притяжения в некоторый фиксированный момент времени для $N=2$:

а)- область D совпадает с пространством переменных ε . В этом случае стационарное движение абсолютно (глобально, в целом) устойчиво;

б,в)- область D ограничена или полуограничена, граница $\Gamma(t)$ не проходит через начало координат. Стационарное движение условно устойчиво.

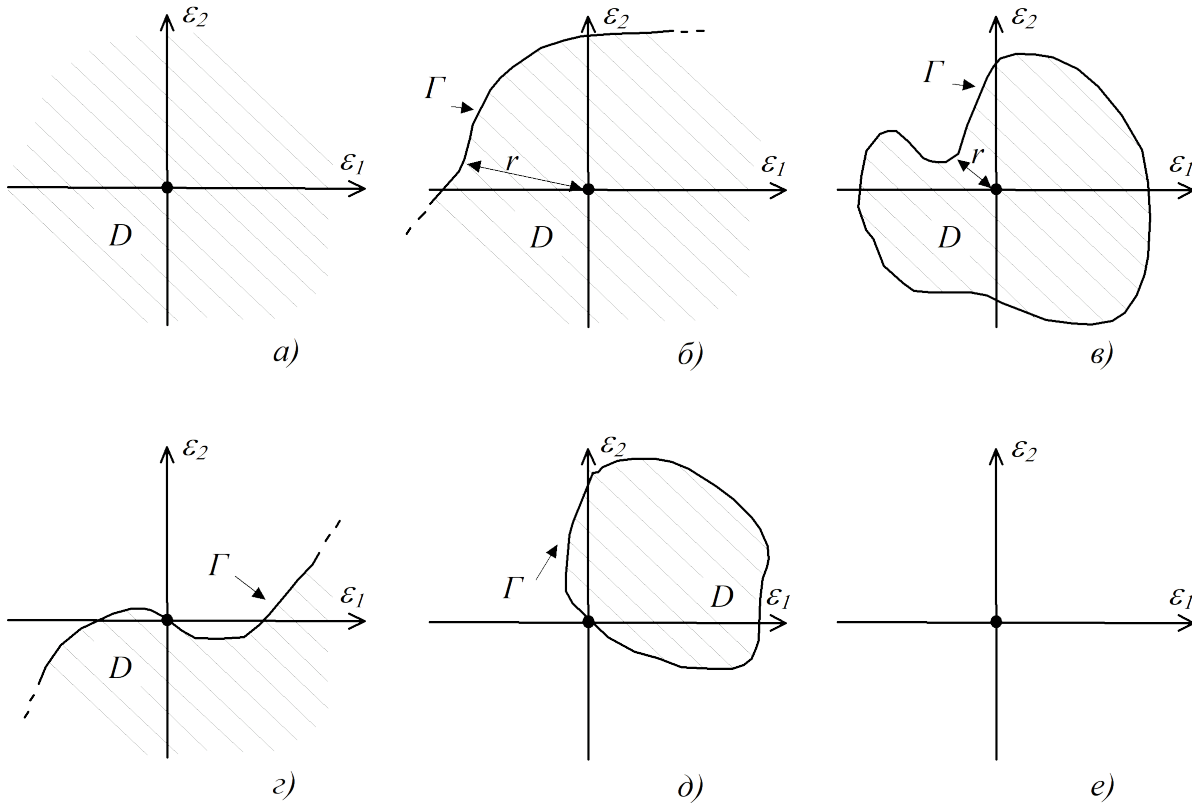


Рис. 4.1.

Определение 4.2. Минимальное расстояние от начала координат до:

$$r_D = \min_t r(t)$$

назовем радиусом области притяжения.

г,д)- граница Γ проходит через начало координат. Имеет место условная устойчивость, но с $r_D=0$;

е)- область D включает в себя только начало координат. Стационарное движение абсолютно неустойчиво.

4.2 Теория локальной устойчивости

Пусть X_c - некоторое стационарное решение. Возникает вопрос - будет ли это решение реализовано? Иначе говоря, будет ли сходиться решение задачи Коши для системы (4.1) к X_c ? Полная определенность в ответе на этот вопрос существует лишь для первого и последнего вариантов областей притяжения, приведенных на рис. 4.1. В первом случае X_c реализуемо при любых начальных условиях, в последнем - не реализуемо. Во всех остальных вариантах сходимость к X_c определяется начальным состоянием динамической системы. Если рассматривать динамику в условиях случайных помех, варианты г, д тоже следует отнести к нереализуемым. Это связано с тем, что после окончания действия возмущающего фактора вектор $\varepsilon(t_0)$ может оказаться вне области D даже если $\|\varepsilon_0\|$ будет сколь угодно малой. Таким образом X_c реализуемо только в случае а, б, в.

Нахождение критерия разделения реализуемых и нереализуемых X_c и составляет суть теории локальной устойчивости. В предположении существования и ограниченности вторых производных компонент вектора $G(t, X)$ по переменным X в окрестности X_c , рассмотрим разложение в ряд Тейлора

$$G(t, X_c + \varepsilon) = G(t, X_c) + \frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} \varepsilon + o(\varepsilon^2). \quad (4.5)$$

Последнее слагаемое в (4.5) называют слагаемым порядка ε^2 . Ограничиваясь в разложении (4.5) двумя первыми слагаемыми, преобразуем (4.3) к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} \varepsilon. \quad (4.6)$$

Матрица

$$\frac{\partial G(t, X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1} & \frac{\partial g_N}{\partial x_2} & K & \frac{\partial g_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

носит название матрицы Якоби.

Если решение системы (4.6) с условием (4.4) обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,$$

то при достаточно малых $\|\varepsilon_0\|$ этим же свойством обладает и решение системы (4.3). В этом случае говорят, что стационарное движение локально асимптотически устойчиво.

Таким образом, исследование устойчивости сводится к исследованию характера решения системы (4.6). Переход от (4.3) к (4.6) называют линеаризацией, а исследование устойчивости с помощью (4.6) называют исследованием устойчивости к малым возмущениям. Иногда говорят просто - «метод малых возмущений». Идея линеаризации и ее теоретическое обоснование принадлежит А. М. Ляпунову. Поэтому исследование локальной устойчивости называют 1-м методом Ляпунова.

Общее решение (4.6) при условии (4.4) ($t_0=0$) можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = F(t) \varepsilon_0,$$

где $F(t)$ - фундаментальная матрица, определяемая решением матричного уравнения

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} F(t), \quad F(0) = E, \quad (4.7)$$

где E - единичная матрица.

Докажем, что $F(t+T) = F(t)F(T)$. Обозначим

$$\frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} = A(t), \quad \Phi(t) = F(t+T).$$

Заменяя в уравнении (4.7) t на $t+T$, и учитывая, что $A(t+T) \equiv A(t)$, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A(t) \cdot \Phi(t), \quad \Phi(0) = F(T).$$

Решение этого уравнения $\Phi(t) = F(t)F(T)$. Отсюда следует, что $F(t+T) = F(t)F(T)$. На основании доказанного равенства находим

$$\varepsilon(mT) = [F(T)]^m \varepsilon_0.$$

Матрица $F(T)$ называется основной. Собственные числа основной матрицы $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, то есть корни уравнения

$$\det(F(T) - \rho E) = 0$$

называются мультипликаторами.

Замечание 4.3. Будем предполагать, что все мультипликаторы различны. Отказ от этого предположения значительно усложнит дальнейшее исследование, но не изменит конечного результата.

В условиях этого предположения возможно представление

$$F(T) = SRS^{-1}. \quad (4.8)$$

Здесь S - невырожденная матрица, $R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$. Таким образом,

$$\varepsilon(mT) = SR^m S^{-1} \varepsilon_0, \quad R^m = \text{diag}(\rho_1^m, \rho_2^m, \dots, \rho_N^m).$$

Возможны следующие варианты:

$$1) |\rho_k| < 1, k = \overline{1, N}, \quad (4.9)$$

то есть все мультипликаторы расположены внутри единичного круга $|\rho| < 1$ в комплексной ρ - плоскости. Стационарное движение устойчиво;

2) часть мультипликаторов находится внутри единичного круга, часть - на границе. Асимптотической устойчивости не будет. Но при достаточно малых $\|\varepsilon_0\|$ движения не выйдут за пределы определенной окрестности $\varepsilon=0$;

- 3) часть мультипликаторов расположена вне единичного круга, часть - внутри. Возможно подобрать такие ε_0 , которые обеспечат сходимость $\varepsilon(t)$ к нулю (см. рис.4.1, г, д). Стационарное движение условно устойчиво. Но, с учетом случайности ε_0 , нереализуемо;
- 4) все мультипликаторы находятся вне единичного круга. Стационарное движение абсолютно неустойчиво.

Для фундаментальной матрицы, определяемой уравнением (4.7), известно представление Флоке-Ляпунова

$$F(t) = Z(t)e^{At}$$

с ограниченной матрицей $Z(t)$, удовлетворяющей условию $Z(0) = Z(T) = E$, и постоянной матрицей A . Таким образом,

$$F(T) = e^{AT} \quad (4.10)$$

Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ матрицы A называют характеристическими показателями. С учетом представления

$$A = S\Lambda S^{-1}, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N),$$

а также зависимостей (4.8), (4.10), находим связь между мультипликаторами и характеристическими показателями

$$\rho_k = e^{\lambda_k T}, \lambda_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k, k = \overline{1, N}.$$

Пусть λ_{rk}, ρ_{rk} и λ_{jk}, ρ_{jk} , соответственно, вещественная и мнимая части λ_k, ρ_k . Тогда

$$\lambda_{rk} = \frac{1}{T} \ln |\rho_k|; \quad (4.11)$$

$$\lambda_{jk} = \frac{1}{T} \begin{cases} \arctg \frac{\rho_{jk}}{\rho_{rk}}, \rho_{rk} \geq 0 \\ \pi - \arctg \frac{\rho_{jk}}{\rho_{rk}}, \rho_{rk} < 0, k = \overline{1, N} \end{cases}$$

Подведем краткий итог, выписав последовательность действий для исследования локальной устойчивости стационарного движения X_c .

1. Найти X_c .
2. Вычислить матрицу Якоби.
3. Найти $F(t)$, решая уравнение (4.7).
4. Найти мультипликаторы и определить их расположение в комплексной ρ - плоскости относительно окружности $|\rho| = 1$.

Казалось бы, что все есть для алгоритмизации и автоматизации процесса исследования локальной устойчивости стационарного движения. На самом деле это далеко не так. Главная проблема возникает на 1-м этапе по причине отсутствия универсализма в методах поиска X_c . Есть определенные сложности вычислительного характера и на других этапах.

Никаких проблем с этапом не возникает лишь для линейных систем

$$\frac{dX}{dt} AX + B(t), \quad B(t+T) \equiv B(t).$$

В этом случае матрица Якоби $\partial G / \partial X = A$ не зависит от X_c и устойчивость стационарного движения определяется только свойствами матрицы A . Рассмотрим сначала вариант с $A = \text{const}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ – собственные числа матрицы A , все различные. Основная матрица определяется выражением (4.10). Из условия устойчивости (4.9) и выражений (4.11) следует условие устойчивости стационарного движения в случае линейных систем с постоянной матрицей

$$\lambda_{rk} < 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Это условие означает, что все собственные числа матрицы A располагаются в левой полуплоскости комплексной λ - плоскости.

Известно, что для устойчивых движений собственные числа матрицы A связаны с постоянными времени τ_k и периодом собственных колебаний T_{ck} зависимостями

$$\tau_k = -\frac{1}{\lambda_{rk}}, \quad T_{ck} = \frac{2\pi}{\lambda_{jk}}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.12)$$

Если $A=A(t)$, то, вычислив основную матрицу $F(T)$ и ее мультипликаторы, по (4.11) можно найти характеристические показатели, а затем, с помощью зависимостей (4.12) рассчитать постоянные времени и периоды собственных колебаний. Вычисление основной матрицы можно упростить, если матрица $A(t)$ является кусочно-постоянной

$$A(t) = A_k, \quad t_{k-1} < t < t_k, \\ k = \overline{1, n}, \quad t_0 = 0, \quad t_n = T.$$

Решая уравнение (4.7), находим основную матрицу

$$F(T) = e^{A_n(t_n - t_{n-1})} \cdot e^{A_{n-1}(t_{n-1} - t_{n-2})} \cdot \dots \cdot e^{A_2(t_2 - t_1)} \cdot e^{A_1 t_1} = \prod_{k=1}^n e^{A_{n-k+1}(t_{n-k+1} - t_{n-k})}$$

в виде произведения экспоненциальных матриц.

Коротко остановимся на дальнейшем развитии теории устойчивости. После выяснения локальной устойчивости возникает проблема различения абсолютной и условной устойчивости. Для решения этой проблемы А.М. Ляпунов предложил метод, который назван вторым методом Ляпунова. Сущность его заключается в нахождении некоторой скалярной функции $V(\varepsilon, t)$, удовлетворяющей условиям

$$V(0, t) \equiv 0, \quad V(\varepsilon, t)|_{\|\varepsilon\| \neq 0} > 0.$$

Абсолютную асимптотическую устойчивость стационарного движения обеспечивает выполнение неравенства

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

на всех решениях системы (4.3).

Функция V получила название функции Ляпунова. Построение этих функций - непростая задача, хотя для некоторых частных случаев это удается сделать [9,10]. Если стационарное движение условно устойчиво, желательно определить радиус области притяжения r_D . Важность решения этой задачи связана с помехоустойчивостью проектируемого объекта, - она будет тем выше, чем больше r_D . Для решения этой задачи А.М.

Ляпунов с помощью введенных им функций $V(\varepsilon, t)$ находил области $D(V)$, вложенные в области притяжения D , то есть $D(V) \subset D$. Знание $D(V)$ позволяет сделать оценку r_D . Математические основы теории устойчивости по А.М. Ляпунову рассматриваются в [11].

4.3. Автономные системы

Для автономных систем (2.2) пространство переменных X обычно называют фазовым пространством. Стационарные движения статического типа изображаются в фазовом пространстве точками и определяются как решения системы

$$G(X) = 0.$$

Эти решения называют еще неподвижными точками фазового пространства. Через каждую точку фазового пространства, кроме неподвижных, проходит единственная интегральная кривая (в предположении непрерывной дифференцируемости $G(X)$). Единственность может нарушаться только в неподвижных точках, которые, по этой причине, называют еще особыми точками. Периодические движения изображаются замкнутыми кривыми в фазовом пространстве, и могут возникнуть только при $N \geq 2$. Поскольку периодические движения порождаются самой динамической системой, то их называют еще автоколебаниями.

Пусть X_c - некоторое стационарное движение. Исследование его локальной устойчивости проводится по той же схеме, что и для систем с внешним воздействием. Для движений статического типа матрица Якоби постоянна, и исследование устойчивости сводится к вычислению собственных чисел этой матрицы $\lambda_k, k = \overline{1, N}$ и выяснению их расположения в комплексной λ - плоскости относительно мнимой оси. Для движений периодического типа надо считать основную матрицу и находить ее мультипликаторы.

Докажем, что один из мультипликаторов равен единице. Уравнение для возмущения, аналогичное (4.6)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial G(X_c)}{\partial X} \varepsilon. \quad (4.13)$$

Дифференцируя по t тождество

$$\frac{dX_c}{dt} \equiv G(X_c),$$

находим

$$\frac{dG(X_c)}{dt} = \frac{\partial G(X_c)}{\partial X} G(X_c).$$

Это тождество можно рассматривать как уравнение относительно $G(X_c)$ с той же фундаментальной матрицей $F(t)$, что и для решения (4.13). Таким образом

$$G(X_c(t)) = F(t)G(X_c(0)).$$

Из условия периодичности $X_c(0) = X_c(T)$ следует

$$(F(T) - E)G(X_c(0)) = 0.$$

Для того чтобы это уравнение относительно $G(X_c(0))$ имело нетривиальное решение, необходимо

$$\det(F(T) - E) = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho = 1$ есть мультипликатор. Если все остальные мультипликаторы находятся внутри единичного круга в комплексной ρ -плоскости, то стационарное движение асимптотически устойчиво. Доказательство этого факта можно найти в [12].

Устойчивые стационарные движения являются притягивающими к себе траектории, соответствующие нестационарным движениям и начинающиеся в их области притяжения. Поэтому множество точек в фазовом пространстве, соответствующее устойчивым движениям X_c , называют аттрактором. Аттрактор является либо изолированной особой точкой, либо замкнутой кривой.

5. МЕТОДЫ ПОИСКА СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим сначала динамическую систему с внешним периодическим воздействием

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X), \quad G(t+T, X) \equiv G(t, X). \quad (5.1)$$

Решение задачи Коши $X(t)$ с условием $X(t_0)=Q$ будем еще обозначать $X(t, t_0, Q)$

$$\left. \begin{array}{l} X(t) \\ X(t_0) = Q \end{array} \right\} \rightarrow X(t, t_0, Q).$$

В силу периодичности правой части (5.1) достаточно выбирать t_0 в диапазоне $0 \leq t_0 < T$. Из условия периодичности следует

$$Q = X(t_0 + T, t_0, Q). \quad (5.2)$$

Вектор начальных условий Q_c для периодического движения является решением системы (5.2) и, очевидно, зависит от t_0 . Для удобства положим $t_0=0$ и обозначим

$$\left. \begin{array}{l} X(t) \\ X(0) = Q \end{array} \right\} \rightarrow X(t, Q).$$

В этих обозначениях система (5.2) примет вид

$$Q = X(T, Q) \quad (5.3)$$

Самый естественный путь для решения системы (5.3) - метод простой итерации по схеме

$$Q^{(s+1)} = X(T, Q^{(s)}), \quad S=0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

где $Q^{(0)}$ задано. Каждое последующее приближение $Q^{(s+1)}$ находится с помощью решения задачи Коши на интервале $(0, T_{(s)})$ с начальным условием, задаваемым предыдущим приближением $Q^{(s)}$. С другой стороны, учитывая периодичность правой части (5.1), $Q^{(s+1)}$ определяется решением задачи Коши на интервале $sT < t < (s+1)T$ с условием

$X(sT)=Q^{(s)}$. Таким образом, реализация итерационного процесса (5.4) эквивалентна решению задачи Коши с начальным условием, задаваемым вектором $Q^{(0)}$, на временном интервале, длительность которого определяется условием сходимости.

Поэтому метод поиска вектора Q_c по схеме (5.4) называют еще методом установления, или поиском X_c через переходной процесс.

Выбор критерия сходимости зависит от выбора нормы в пространстве векторов. Например, если

$$\|X\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|),$$

то в качестве критерия сходимости выбирают выполнение неравенств

$$\left| q_k^{(s+1)} - q_k^{(s)} \right| - \frac{\delta}{2} \left| q_k^{(s+1)} + q_k^{(s)} \right| < 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.5)$$

Если же

$$\|x\| = \left\{ \sum_{k=1}^N x_k^2 \right\}^{1/2},$$

то критерий сходимости

$$\left\{ \sum_{k=1}^N \left(q_k^{(s+1)} - q_k^{(s)} \right)^2 \right\}^{1/2} - \delta/2 \left\{ \sum_{k=1}^N \left(q_k^{(s+1)} + q_k^{(s)} \right)^2 \right\}^{1/2} < 0. \quad (5.6)$$

Задание величины δ в (5.5), (5.6) определяет относительное расхождение между предыдущей и последующей итерациями. В практических расчетах можно принимать $\delta \sim 0,01$.

Рассмотрим, какие проблемы могут возникнуть в связи со сходимостью итерационного процесса (5.4). Возможны следующие варианты.

Итерационный процесс сходится. Скорость сходимости определяется минимальным числом итераций, обеспечивающих в зависимости от выбранной нормы выполнение неравенств (5.5) или (5.6). В общем случае скорость сходимости будет определяться параметрами устройства.

Для линейных систем

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t),$$

решение которых известно

$$X(t, Q) = F(t)Q + X(t, 0)$$

система (5.3) примет вид

$$[E - F(T)]Q = X(T, 0). \quad (5.7)$$

Это позволяет находить Q_c , минуя переходной процесс. Метод нахождения периодического решения с помощью решения системы (5.7) и расчета $X_c(t) = X(t, Q_c)$ на одном периоде называют непосредственным.

Итерационная схема (5.4) для линейных систем представляется в форме

$$Q^{(s+1)} = F(T)Q^{(s)} + X(T, 0).$$

Отсюда последовательно находим

$$Q^{(m)} = [E + F(T) + \dots + F^{m-1}(T)]X(T, 0) + F^m(T)Q^{(0)}.$$

Сворачивая выражение в квадратных скобках как сумму членов геометрической прогрессии, получим

$$Q^{(m)} = [E - F(T)]^{-1} [E - F^m(T)]X(T, 0) + F^m(T)Q^{(0)}.$$

В случае различных мультипликаторов $\rho_k, k = \overline{1, N}$

$$F(T) = SRS^{-1}, \quad R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N),$$

$$Q^{(m)} = S(E - R)^{-1}S^{-1}X(T, 0) + SR^mS^{-1}Q^{(0)}.$$

Для устойчивого движения $|\rho_k| < 1, k = \overline{1, N}$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^{(m)} = Q_c = S(E - R)^{-1}X(T, 0) = [E - F(T)]^{-1}X(T, 0).$$

Ясно, что скорость сходимости будет определяться положением ρ_k внутри единичного круга в комплексной ρ -плоскости. Если

$$\max_k (1 - |\rho_k|) \ll 1,$$

то устройство называют слабодемпфированным. Если же

$$\max_k |\rho_k| \ll 1,$$

то устройство будет сильнодемпфированным. Очевидно, что слабодемпфированные устройства будут весьма чувствительны к помехам.

Итерационный процесс не сходится. Такая ситуация может возникнуть для нелинейных систем, когда период $X_c(t)$ не совпадает с периодом внешнего воздействия T . В этом случае период $X_c(t)$, который будет кратным T , является искомой величиной. Возможна ситуация, когда сходимость ни к какому периодическому решению не наблюдается. Если выходные характеристики не устраивают разработчика, следует менять параметры, либо даже структуру устройства. Причины несходимости итерационного процесса будут выяснены далее при изучении динамики стабилизатора напряжения с ШИМ.

В принципе для решения системы (5.3) можно построить другие итерационные схемы, имеющие более высокую скорость сходимости по сравнению с методом установления. Примером такого подхода является итерационная схема на основе метода Ньютона

$$Q^{(s+1)} = Q^{(s)} - \left[E - \frac{\partial X(T, Q^{(s)})}{\partial Q} \right]^{-1} [Q^{(s)} - X(T, Q^{(s)})]. \quad (5.8)$$

Но надо ли это делать? Во-первых, использование всех этих схем не снимает проблемы сходимости. Во-вторых, в отличие от схемы (5.4), теряется информация о переходных процессах. Наконец, могут возникнуть дополнительные осложнения. Так в схеме (5.8) возникает проблема расчета обращаемой матрицы и возможность ее обращения. Исключение может составить лишь случай слабодемпфированной системы, когда расчет по схеме (5.4) требует слишком больших затрат машинного времени.

Рассмотрим теперь автономные системы

$$\frac{dX}{dt} = G(X).$$

Здесь возможны стационарные решения статического и периодического типа. И в обоих случаях можно использовать итерационную схему (5.4).

Если X_c - статического типа и время переходного процесса t_p известно, то в (5.4) надо выбрать $T=t_p$ и закончить вычисления на первой итерации, положив $X_c=Q^{(1)}$. Если же время установления неизвестно, величина T в (5.4) играет роль временного интервала, через который проверяется критерий сходимости. Однако выбор этого интервала - нестандартная задача. Если X_c - периодического типа, система (5.3) становится незамкнутой, поскольку искомыми являются не только N компонент вектора Q_c , но и период T . Поэтому необходимо еще одно дополнительное условие, которое добавит к схеме (5.4) еще одно итерационное соотношение. Выбор этого условия в общем случае тоже нестандартная задача.

6. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Полный анализ электронной схемы требует использования широкого набора методов вычислительной математики. Из всех численных методов здесь будут кратко рассмотрены лишь те, которые занимают центральное место в системе реализации математических моделей. Это методы, связанные с проблемой собственных чисел и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

6.1. Проблема собственных чисел

Локальная устойчивость стационарного движения определяется по мультипликаторам (собственным числам) основной матрицы $F(T)$, являющимся корнями уравнения

$$\det(F - \rho E) = 0. \quad (6.1)$$

Для линейных систем с постоянной матрицей A мультипликаторы связаны с ее собственными числами (см. (4.11)). Поэтому можно не рассматривать основную матрицу, а ограничиться поиском собственных чисел матрицы A с помощью уравнения, аналогичного (6.1).

Существует частичная и полная проблема собственных чисел. В частности, исследование устойчивости - частичная проблема. Для ее решения достаточно сделать оценку максимального по модулю мультипликатора. Полная проблема - это вычисление всех собственных чисел. Нас будет интересовать полная проблема собственных чисел, поскольку собственные числа дают важную информацию об инерционных свойствах объекта и частотах собственных колебаний.

Возможны два подхода к решению полной проблемы собственных чисел. Рассмотрим каждый из них.

1) Сущность первого подхода заключается в раскрытии определителя в (6.1), то есть нахождении коэффициентов полинома, называемого еще характеристическим многочленом, а затем - в

нахождении корней этого полинома. Непосредственное раскрытие определителя уже для $N > 3$ непростое дело. Поэтому для определения характеристического многочлена используют другие методы. Одним из наиболее эффективных, с точки зрения вычислительных затрат, является метод приведения матрицы F к подобной ей матрице почти треугольного вида

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \text{K} & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \text{K} & f_{2N} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ f_{N1} & f_{N2} & \text{K} & f_{NN} \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \text{K} & p_{N-1} & p_N \\ 1 & 0 & 0 & \text{K} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{K} & 0 & 0 \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ 0 & 0 & 0 & \text{K} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы F и P связаны соотношением

$$P = S^{-1}FS$$

с невырожденной матрицей S . Известно, что подобные матрицы имеют одинаковые собственные числа. Матрица P получается с помощью конечной последовательности подобных преобразований по схеме

$$P_k = S_k^{-1}P_{k-1}S_k, \\ k = \overline{1, N-1}, \quad P_0 = F, \quad P_{N-1} = P.$$

Суть первого преобразования матрицы F , или нахождение матрицы P_1 , заключается в том, что последняя строка $FS_1 = P_0S_1$ принимает вид последней строки матрицы P . Умножение матрицы P_0S_1 на S_1^{-1} слева не меняет вида последней строки, так что

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} & \text{K} & p_{1,N-1}^{(1)} & p_{1,N}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} & \text{K} & p_{2,N-1}^{(1)} & p_{2,N}^{(1)} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ p_{N-1,1}^{(1)} & p_{N-1,2}^{(1)} & \text{K} & p_{N-1,N-1}^{(1)} & p_{N-1,N}^{(1)} \\ 0 & 0 & \text{K} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом строятся последующие преобразования, пока не будет сформирована матрица P . В результате получаем

$$\det(F - \rho E) = \det(P - \rho E) = \begin{vmatrix} p - \rho_1 & p_2 & K & p_{N-1} & p_N \\ 1 & -\rho & K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 1 & -\rho \end{vmatrix}.$$

С помощью разложения этого определителя по элементам первой строки находим

$$\det(F - \rho E) = (-1)^N \left[\rho^N - p_1 \rho^{N-1} - K - p_{N-1} \rho - p_N \right]. \quad (6.2)$$

Матрицу P называют матрицей Фронбениуса, в метод ее получения - метод Данилевского.

Другой подход к нахождению коэффициентов характеристического многочлена следует из представления зависимости (6.2) в виде

$$-p_1 \rho^{N-1} - K - p_{N-1} \rho - p_N = (-1)^N \det(F - \rho E) - \rho^N.$$

Задавая последовательность различных чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, на основании этой зависимости получаем систему линейных уравнений относительно $p_1, p_2, \dots, p_N$

$$-p_1 \rho_i^{N-1} - K - p_{N-1} \rho_i - p_N = (-1)^N \det(F - \rho_i E) - \rho_i^N, i = \overline{1, N}.$$

Определитель этой системы, называемый определителем Вандермонда, отличен от нуля. Поэтому система разрешима. Этот подход, в отличие от метода Данилевского, прост в алгоритмическом плане, но требует больше вычислительных затрат. Так же прост в алгоритмическом плане метод Леверрье, когда коэффициенты многочлена в (6.2) считаются по формулам

$$p_1 = S_1, p_2 = \frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1), K, p_N = \frac{1}{N}(p_N + p_1 S_{N-1} + K + p_{N-1} S_1),$$

где $S_k = S_p(F^k)$ - след матрицы F^k , то есть сумма ее диагональных элементов. Однако метод Леверрье пригоден лишь в случае, когда все собственные числа матрицы F по модулю меньше единицы. Если это

условие не выполнено, при нахождении степеней матрицы F по схеме $Z_k = FZ_{k-1}$, $k = \overline{1, N}$, $Z_0 = E$, будет происходить нарастание ошибок. Это приведет либо к переполнению разрядной сетки ЭВМ, либо к искажению P_k с ростом k .

Основная сложность нахождения собственных чисел связана с вычислением корней характеристического многочлена. При больших N существуют приемы последовательного нахождения корней (например, с помощью метода Ньютона) с дальнейшим понижением степени характеристического многочлена. Но такой подход может привести к большим погрешностям в вычислении последних корней. Обычно разработкой методов поиска корней многочленов и их алгоритмизацией занимаются вычислители-профессионалы. Результаты разработок оформляются в виде стандартных процедур. Развитие здесь идет по пути универсализации алгоритмов. Пользователям важно лишь помнить, что по причине отсутствия универсальности возможны случаи либо несрабатывания процедур, либо появление больших погрешностей.

2) Второй подход к разрешению полной проблемы собственных чисел связан с построением последовательности подобных преобразований

$$P_{k+1} = Q_{k+1}^{-1} P_k Q_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad P_0 = F. \quad (6.3)$$

Последовательность эта строится следующим образом [8]. Пусть матрица P_K найдена. Доказано, что возможно ее представление в виде

$$P_k = Q_{k+1} R_{k+1},$$

где Q_{k+1} - ортогональная, R_{k+1} - правая треугольная матрицы. Затем полагаем $P_{k+1} = R_{k+1} Q_{k+1} = Q_{k+1}^{-1} P_k Q_{k+1}$. Если последовательность (6.3) сходится, то предельная матрица $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k$ является либо диагональной,

либо треугольной, либо блочно-треугольной, порядки диагональных блоков которой не выше двух. Это значит, что характеристический многочлен $\det(P - \rho E)$ распадается на произведение многочленов, степень

которых не выше двух. Нахождение корней этих многочленов не вызывает затруднений. Такой алгоритм решения полной проблемы собственных чисел получил название QR - алгоритма. Существуют также различные модификации QR - алгоритмов. Сходимость последовательности подобных преобразований в QR - алгоритме доказана для широкого класса матриц F . Однако назвать QR - алгоритмы универсальными при решении проблем собственных чисел пока рано.

6.2. Некоторые схемы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

6.2.1. Простейшие схемы численного интегрирования. Понятие аппроксимации

Ограничимся рассмотрением динамических систем с внешним периодическим воздействием

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X), \quad G(t + T, X) \equiv G(t, X). \quad (6.4)$$

Нас интересуют решения задачи Коши для этой системы в области $t > 0$. Поскольку в каждом из интервалов $(k-1)T \leq t \leq kT$, $k=1, 2$, система (6.4) имеет одну и ту же форму, достаточно рассматривать ее решения в области

$$0 \leq t \leq T.$$

Для того, чтобы использовать в расчетах ЭВМ, надо перейти от непрерывной, или континуальной формы записи модели к дискретной. С целью реализации этой идеи разобьем всю область интегрирования $[0, T]$ на отрезки

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K \dots < t_M = T$$

Величину $h_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1, M}$ называют шагом дискретизации, а саму дискретную область - сеточной областью. Мы будем далее полагать $h_k = h = \text{const}$. Сеточную область при этом называют равномерной.

Моменты времени t_k называют узлами сеточной области. Значения искомых функций в узлах сеточной области будем обозначать $X(t_k)=X_k$. В k -м узле сеточной области система (6.4)

$$\begin{aligned} \frac{dX_k}{dt} &= G_k \\ \frac{dX_k}{dt} &= \left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=t_k}, G_k = G(t_{k-1}, X_k). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Предположим, что решение задачи Коши известно в узлах, предшествующих t_k . При достаточной гладкости (то есть существовании производных нужного порядка по всем переменным) $G(t, X)$, используем разложение в ряд Тейлора

$$X_k = X(t_{k-1} + h) = X_{k-1} + h \frac{dX_{k-1}}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 X_{k-1}}{dt^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 X_{k-1}}{dt^3} + K \quad (6.6)$$

С помощью этого разложения находим

$$\frac{dX_{k-1}}{dt} = \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{d^2 X_{k-1}}{dt^2} - K$$

Подставляя это значение производной в (6.5) для $(k-1)$ -го узла, будем иметь

$$\frac{dX_{k-1}}{dt} - G_{k-1} = \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_{k-1} - 0(h) = 0, \quad (6.7)$$

где

$$0(h) = \frac{h}{2} \cdot \frac{d^2 X_{k-1}}{dt^2} + K$$

Выражение $0(h)$ обычно называют слагаемым порядка h . Отбрасывая в (6.7) слагаемые порядка h , получаем

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_{k-1} = 0. \quad (6.8)$$

Отметим существенное различие уравнений (6.7), (6.8). Совокупность уравнений (6.7) для $k = \overline{1, M}$ представляют собой систему, в общем

случае, нелинейных (трансцендентных) уравнений относительно компонент X_k . Но, поскольку (6.7) содержит неопределенное слагаемое $0(h)$, то и решить указанную систему не представляет возможным. Уравнение (6.8) уже не содержит неопределенностей и, следовательно, порождаемую им систему нелинейных уравнений можно решать на ЭВМ. При достаточно малых h естественно предположить, что решение этой системы нелинейных уравнений будет близко к решениям соответствующей системы, порождаемой уравнением (6.7). Если это так, то уравнения (6.8) представляют собой дискретную форму записи динамической системы (6.4). Вектора X_k , определенные в сеточной области, мы будем называть сеточными вектор-функциями, а их компоненты - сеточными функциями.

Уравнение (6.8) представляет собой пример простейшей численной схемы, которая носит название явной схемы Эйлера. Поскольку правые части выражений (6.7), (6.8) отличаются на слагаемое порядка h , то говорят, что явная схема Эйлера имеет порядок аппроксимации $0(h)$, или первый порядок аппроксимации. Название явной следует из того, что схема (6.8) разрешима относительно X_k :

$$X_k = X_{k-1} + hG_{k-1}. \quad (6.9)$$

Используя разложение

$$X_{k-1} = X(t_k - h) = X_k - h \frac{dX_k}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 X_k}{dt^2} - K$$

и действуя точно так же, как и в предыдущем случае, найдем

$$\frac{dX_k}{dt} - G_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_k + 0(h) = 0.$$

Отсюда следует схема

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_k = 0, \quad (6.10)$$

носящая название неявной схемы Эйлера, порядок аппроксимации которой тоже $0(h)$. Название неявной следует из того, что схема неразрешима явным образом относительно X_k .

При получении явной схемы Эйлера в разложении (6.6) было использовано два первых слагаемых. Если мы учтем еще одно, то вместо (6.7) получим

$$\frac{dX_{k-1}}{dt} - G_{k-1} = \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_{k-1} - \frac{h}{2} \frac{dG_{k-1}}{dt} + 0(h^2) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{dG_{k-1}}{dt} = \frac{G_k - G_{k-1}}{h} + 0(h),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dX_{k-1}}{dt} - G_{k-1} &= \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - G_{k-1} - \frac{h}{2} \left(\frac{G_k - G_{k-1}}{h} + 0(h) \right) + 0(h^2) = \\ &= \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - \frac{1}{2} (G_k + G_{k-1}) + 0(h^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем схему

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{h} - \frac{1}{2} (G_k + G_{k-1}) = 0, \quad (6.11)$$

имеющую порядок аппроксимации $0(h^2)$. В общем случае на одной и той же достаточно мелкой сеточной области схема (6.11) будет более точной по сравнению со схемами Эйлера, поскольку она имеет более высокий порядок аппроксимации. Схема (6.11) является неявной и носит название схемы трапеций. Это название следует из другого способа ее получения. Исходя из (6.4), найдем

$$X_k = X_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} G(t, X) dt.$$

Вычисляя интеграл по формуле трапеций, получим схему

$$X_k = X_{k-1} + \frac{h}{2} (G_k + G_{k-1}),$$

совпадающую со схемой (6.11).

Обобщим теперь понятие аппроксимации. Пусть динамическая система

$$\mathfrak{R}(X) = \frac{dX}{dt} - G(t, X) = 0$$

определяется оператором $\mathfrak{R}$, заданным на множестве непрерывно дифференцируемых вектор-функций, определенных на интервале $0 \leq t \leq T$. Обозначим это множество $D = \{X(t) \in C_1, t \in [0, T]\}$. Поставим в соответствие D множество $D_h = \{X_k = X(t_k), t_k = kh, k = \overline{0, M}\}$. Пусть на D_h

$$\mathfrak{R}(X_p) = \mathfrak{R}_h(X_k, X_{k-1}, \dots, X_{k-r}) + O(h^m) = 0; r = 1, 2, \dots, K; p \leq k, \quad (6.12)$$

где оператор $\mathfrak{R}_h$ является сеточным, то есть заданным на дискретном множестве сеточных вектор-функций. Будем говорить, что оператор $\mathfrak{R}_h$ аппроксимирует $\mathfrak{R}$ на D_h с порядком аппроксимации $O(h^m)$, если

$$\left\| O(h^m) \right\| \leq \mathfrak{I} h^m, \quad 0 < \mathfrak{I} = \text{const} < \infty.$$

Уравнение

$$\mathfrak{R}_h(X_k, X_{k-1}, \dots, X_{k-r}) = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

назовем численной r -шаговой схемой. Схемы Эйлера и схема трапеций являются одношаговыми. Обычно схемы с $r > 1$ называют многошаговыми. Численной схемой называют и различные модификации схемы (6.13). Например, схемой Эйлера называют схемы (6.8) и (6.9).

6.2.2. Устойчивость численных схем

Использование схемы для расчета задачи Коши предполагает, что $X_0, X_1, \dots, X_{r-1}$ заданы. При $k=r, r+1, \dots, M$ с помощью схемы (6.13) последовательно находятся $X_r, X_{r+1}, \dots, X_M$. Сеточные вектор-функции, соответствующие континуальной модели обозначим $\bar{X}_k$. Вектор $\varepsilon_k = X_k - \bar{X}_k$ назовем погрешностью. Возникает естественный вопрос об

оценке этой погрешности, отражающей степень близости в узлах сеточной области решений задачи Коши для непрерывной (6.12) и дискретной (6.13) моделей. Уравнение для погрешности получается вычитанием из уравнения (6.13) уравнения (6.12) с учетом того, что в (6.12) сеточные вектор-функции соответствуют непрерывной модели

$$\mathfrak{R}_h(\bar{X}_k + \varepsilon_k, \bar{X}_{k-1} + \varepsilon_{k-1}, K, \bar{X}_{k-r} + \varepsilon_{k-r}) - \mathfrak{R}_h(\bar{X}_k, \bar{X}_{k-1}, K, \bar{X}_{k-r}) = O(h^m). \quad (6.14)$$

Рассмотрим уравнение, которое назовем уравнением для возмущений

$$\mathfrak{R}_h(\bar{X}_k + \varepsilon_k, \bar{X}_{k-1} + \varepsilon_{k-1}, K, \bar{X}_{k-r} + \varepsilon_{k-r}) - \mathfrak{R}_h(\bar{X}_k, \bar{X}_{k-1}, K, \bar{X}_{k-r}) = 0, \quad (6.15)$$

отличающееся от (6.14) только слагаемым $O(h^m)$.

Решение уравнения (6.15) обозначим $\bar{\varepsilon}_k$.

Численная схема (6.13) называется устойчивой, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_k = 0. \quad (6.16)$$

Неограниченность k в этом пределе не противоречит тому, что максимальное значение k в сеточной области равно M . Не надо забывать, что фактически задача Коши рассматривается в неограниченной сеточной области. Если выполнено условие устойчивости (6.16), то при условии достаточной гладкости $G(t, X)$ для широкого класса численных схем решение уравнения (6.14) удовлетворяет условию

$$\|\varepsilon_k\| \leq \|\bar{\varepsilon}_k\| + \mathfrak{I}_1 h^m, \quad 0 < \mathfrak{I}_1 = \text{const} < \infty. \quad (6.17)$$

Доказательство (6.17) обычно проводится для определенного класса схем. При выполнении условия (6.16), задавая $\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1, K, \bar{\varepsilon}_{r-1} = 0$, получим $\bar{\varepsilon}_k = 0$, $k > r - 1$. Правая часть неравенства (6.17) будет определяться вторым слагаемым. Это значит, что при $h \rightarrow 0$ погрешность тоже стремится к нулю. Таким образом, наличие аппроксимации и устойчивости влечет за собой сходимость решений задачи Коши для непрерывной и дискретной моделей.

Для явной схемы Эйлера уравнение (6.15) дает

$$\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{h} = G(t_{k-1}, \bar{X}_{k-1} + \varepsilon_{k-1}) - G(t_{k-1}, \bar{X}_{k-1}).$$

В случае линейных систем с постоянной матрицей A находим

$$\varepsilon_k = (E + hA) \varepsilon_{k-1}.$$

Решение этого уравнения

$$\varepsilon_k = (E + hA)^k \varepsilon_0.$$

Используя представление $A = S\Lambda S^{-1}$, находим

$$\varepsilon_k = S(E + \Lambda h)^k S^{-1} \varepsilon_0.$$

Отсюда следует условие устойчивости $|1 + \lambda h| < 1$ или

$$\left| \lambda + \frac{1}{h} \right| < \frac{1}{h}.$$

В комплексной λ - плоскости это неравенство справедливо для точек, лежащих в круге с центром в точке $\lambda = -1/h$ и радиусом $1/h$ (см. рис.6.1,а).

Эта область называется областью

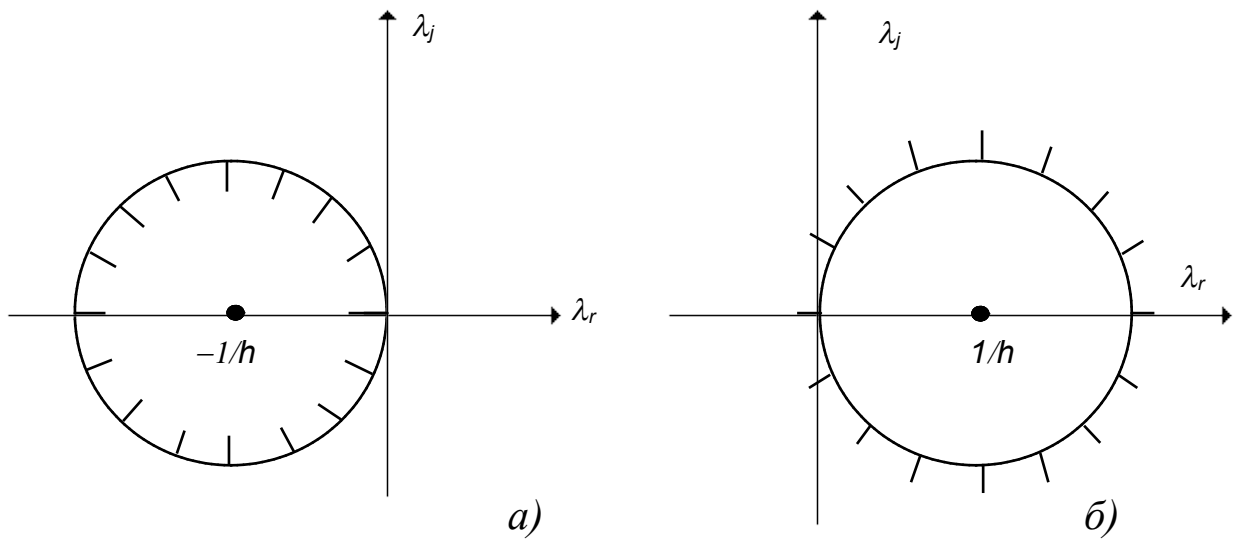


Рис. 6.1.

устойчивости для явной схемы Эйлера. Очевидно, что для любых λ , расположенных в левой полуплоскости λ - плоскости всегда можно выбрать достаточно малое h , обеспечивающее попадание всех собственных чисел в область устойчивости. Таким образом, явная схема Эйлера условно устойчива. На рис. 6.1,б изображена область устойчивости для неявной схемы Эйлера в случае линейных систем с постоянной матрицей A . Это внешность круга с центром в точке $\lambda=1/h$ и радиусом $1/h$. Ясно, что при любых λ все собственные числа попадают в область устойчивости. Оказалось, что неявная схема обладает свойством абсолютной устойчивости, или A - устойчивости. Свойством A - устойчивости обладает и схема трапеций.

6.2.3. Схемы Рунге-Кутты и разностные схемы

Сеточный оператор в (6.12) при построении схем Рунге-Кутты выбирается в виде

$$\mathfrak{R}_h = (X_k, X_{k-1}) = \frac{1}{h}(X_k - X_{k-1}) + \sum_{i=1}^q p_i Z_i, \quad (6.18)$$

где

$$Z_1 = G_{k-1},$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= G(t_{k-1} + \alpha_2 h, X_{k-1} + \beta_{21} Z_1 h), \\ Z_3 &= G(t_{k-1} + \alpha_3 h, X_{k-1} + \beta_{31} Z_1 h + \beta_{32} Z_2 h), \\ &\dots\dots\dots \\ Z_m &= G(t_{k-1} + \alpha_m h, X_{k-1} + \beta_{m1} Z_1 h + \dots + \beta_{m,m-1} Z_{m-1} h). \end{aligned}$$

Параметры этой схемы

$$\alpha_2, \alpha_3, K, \alpha_m, p_1, p_2, K, p_m, \beta_{ij}, 1 \leq j \leq i-1, i = \overline{2, m}$$

подбираются из условия

$$\mathfrak{R}(X_{k-1}) - \mathfrak{R}_h(X_k, X_{k-1}) = 0(h^m)$$

с использованием разложений в ряд Тейлора в окрестности узла t_{k-l} .

При $m=1$ легко находится $P_1=I$, и схема Рунге-Кутты совпадает с явной схемой Эйлера. При $m>1$ система уравнений относительно параметров имеет неединственное решение, что означает неединственность схем Рунге-Кутты с одним и тем же порядком аппроксимации. С ростом m резко нарастает трудоемкость проведения аналитических выкладок для определения параметров схемы. Наиболее употребительна схема ($m=4$)

$$\begin{aligned} Z_1 &= G_{k-1}, \\ Z_2 &= G(t_{k-1} + h/2, X_{k-1} + Z_1 h/2), \\ Z_3 &= G(t_{k-1} + h/2, X_{k-1} + Z_2 h/2), \\ Z_4 &= G(t_{k-1} + h, X_{k-1} + Z_3 h) \\ \frac{X_k - X_{k-1}}{h} &= \frac{1}{6} [Z_2 + 2(Z_2 + Z_3) + Z_4]. \end{aligned}$$

Схемы Рунге-Кутта на основе оператора (6.18) являются одношаговыми, явными и условно устойчивыми. При выполнении условия устойчивости (6.16) для них доказано выполнение неравенства (6.17) [13].

Источником конструирования схем является сеточный оператор

$$\mathfrak{R}_h(X_k, X_{k-1}, K, X_{k-r}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^r a_i X_{k-i} - \sum_{i=0}^r b_i G_{k-i}.$$

Параметры схемы определяются из условия

$$\Re(X_k) - \Re_h(X_k, X_{k-1}, \mathbf{K}, X_{k-r}) = O(h^m)$$

с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности $t=t_k$. Здесь m будет зависеть от r . Для одного и того же порядка аппроксимации можно построить, в принципе, бесконечно много схем. В частности, при $r=1$ получается схема

$$a_0 \frac{X_k - X_{k-1}}{h} - [b_0 G_k + (a_0 - b_0) G_{k-1}] = 0.$$

Полагая $b_0=0$, получаем явную схему Эйлера, а при $b_0=a_0$ - неявную схему Эйлера. При $r>1$ получаются многошаговые схемы. Интересно отметить, что можно сконструировать абсолютно неустойчивые разностные схемы. Рассмотрим, например, схему

$$\frac{X_k - X_{k-2}}{2h} - G_{k-1} = 0, k = 2, 3, K \quad (6.19)$$

Это явная двухшаговая схема с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Проведем исследование ее устойчивости. Уравнение для возмущения ε_k в случае линейных систем с постоянной матрицей $A=SA S^{-1}$ находится в соответствии с (6.15)

$$\varepsilon_k - 2hA\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-2} = 0. \quad (6.20)$$

Предполагается, что вектора $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ заданы. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\varepsilon_k = SR^k C, \quad (6.21)$$

где $R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$, $C = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$. Компоненты вектора C являются произвольными постоянными, а элементы матрицы R - искомые величины. Заметим, что матрица S , столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы A , невырождена. Невырожденной должна быть и матрица R . Если бы это было не так, то, как следует из самого вида решения (6.21), между компонентами вектора ε_k должна существовать определенная зависимость. Но этого не должно быть, поскольку начальные возмущения задаются произвольно. Подставляя (6.21) в (6.20), находим

$$SR^{k-2}(R^2-2h\Lambda R-E)C=0.$$

Учитывая невырожденность матрицы SR^{k-2} , приходим к эквивалентной системе

$$(R^2-2h\Lambda R-E)C=0.$$

Эта система представляет собой N независимых уравнений, каждое из которых имеет вид

$$(\rho^2-2h\lambda\rho-1)\sigma=0. \quad (6.22)$$

Здесь ρ , λ , σ - соответствующие компоненты матриц R , Λ и вектора C . Условием нетривиальной разрешимости уравнения (6.22) относительно σ является уравнение

$$\rho^2-2h\lambda\rho-1=0.$$

Пусть $\lambda=\lambda_r+j\lambda_j$, $\rho=re^{j\varphi}$. Тогда

$$2h\lambda = \rho - \frac{1}{\rho} = re^{j\varphi} - \frac{1}{r}e^{-j\varphi}$$

и, выделяя вещественную и мнимую части,

$$2h\lambda_r = (r - \frac{1}{r})\cos\varphi, \quad 2h\lambda_j = (r + \frac{1}{r})\sin\varphi.$$

Исключая из этих уравнений φ , относительно r получаем уравнение

$$f(r) = \frac{4h^2\lambda_r^2r^2}{(r^2-1)^2} + \frac{4h^2\lambda_j^2r^2}{(r^2+1)^2} - 1 = 0.$$

На основании свойств функции $f(r)$

$$\begin{aligned} f(0) &= -1, \lim_{r \rightarrow 1 \pm 0} f(r) = \infty, \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = -1 \\ f'(r) &> 0, 0 < r < 1, f'(r) < 0, r > 1 \end{aligned}$$

делаем вывод, что в области $r > 0$ существуют два корня: $r_1 < 1$, $r_2 > 1$.

Таким образом, существуют две матрицы R_1 и R_2 , позволяющие найти общее решение уравнений (6.20)

$$\varepsilon_k = SR_1^k C_1 + SR_2^k C_2$$

с двумя произвольными векторами C_1, C_2 , для нахождения которых используются $\varepsilon_0, \varepsilon_1$. Элементы матрицы R_1 по модулю меньше единицы, а матрицы R_2 - больше единицы. В общем случае $C_2 \neq 0$, поэтому с ростом k возмущение ε_k неограниченно нарастает. Это означает, что схема (6.19) абсолютно неустойчива и использовать ее в расчетах нельзя.

7. ДИНАМИКА СТАБИЛИЗАТОРА С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ И ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

7.1. Структура стабилизатора, математическая модель и результаты расчетов задачи Коши

Схема замещения импульсного стабилизатора напряжения представлена на рис. 7.1

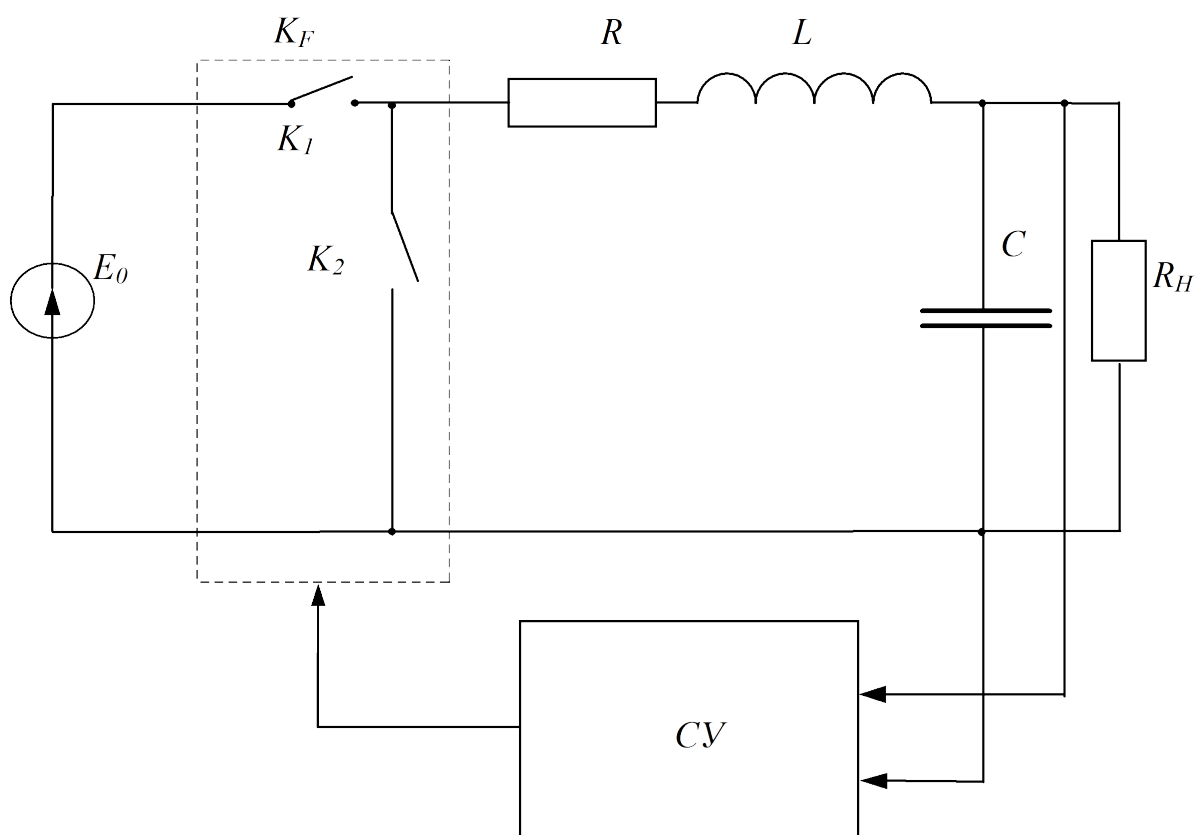


Рис. 7.1.

Силовая часть состоит из источника постоянного напряжения E_0 , ключевого преобразователя K_F и выходного фильтра. Ключевой преобразователь состоит из двух управляемых ключей K_1 и K_2 , работающих в противотакте. Математическая модель силовой части стабилизатора

$$L \frac{di_l}{dt} + Ri_l + U_c = k_F(\xi) E_0,$$

$$C \frac{dU_c}{dt} = i_l - U_c / R_H.$$

Здесь L - индуктивность, R - сопротивление, C - емкость, R_H - сопротивление нагрузки, i_l - ток в индуктивности, U_c - напряжение на емкости. Действие ключевого преобразователя зависит от напряжения ξ и отражено коммутационной функцией

$$k_F(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{кл. } K_1 \text{ работает} \\ 0, & \text{кл. } K_2 \text{ работает} \end{cases}$$

Система управления (СУ) состоит из ряда звеньев.

1) Датчик обратной связи по выходному напряжению, на выходе которого формируется напряжение βU_c с коэффициентом передачи β .

2) Звено, формирующее напряжение ошибки

$$U_{ош} = U_y - \beta U_c,$$

где U_y - напряжение управляющего воздействия.

3) Корректирующее устройство, на выходе которого формируется напряжение

$$U_{ку} = \alpha U_{ош},$$

где α - коэффициент усиления.

4) Формирование импульса определяется напряжением,

$$\xi = U_{ку} - U_n, U_n = U_{он} \left(\frac{t}{a} - E_1 \left(\frac{t}{a} \right) \right),$$

где U_n - пилообразное напряжение, $U_{он}$ - опорное напряжение, a - период квантования, E_1 - целая функция.

Закон, по которому формируется импульс, отражается в виде так называемых принципов формирования импульса, связанных со спецификой системы управления. (см. рис.7.2.).

1) Импульс может возникнуть только в начале тактового интервала

$$(k-1)a < t < ka, \quad k = 1, 2, \dots$$

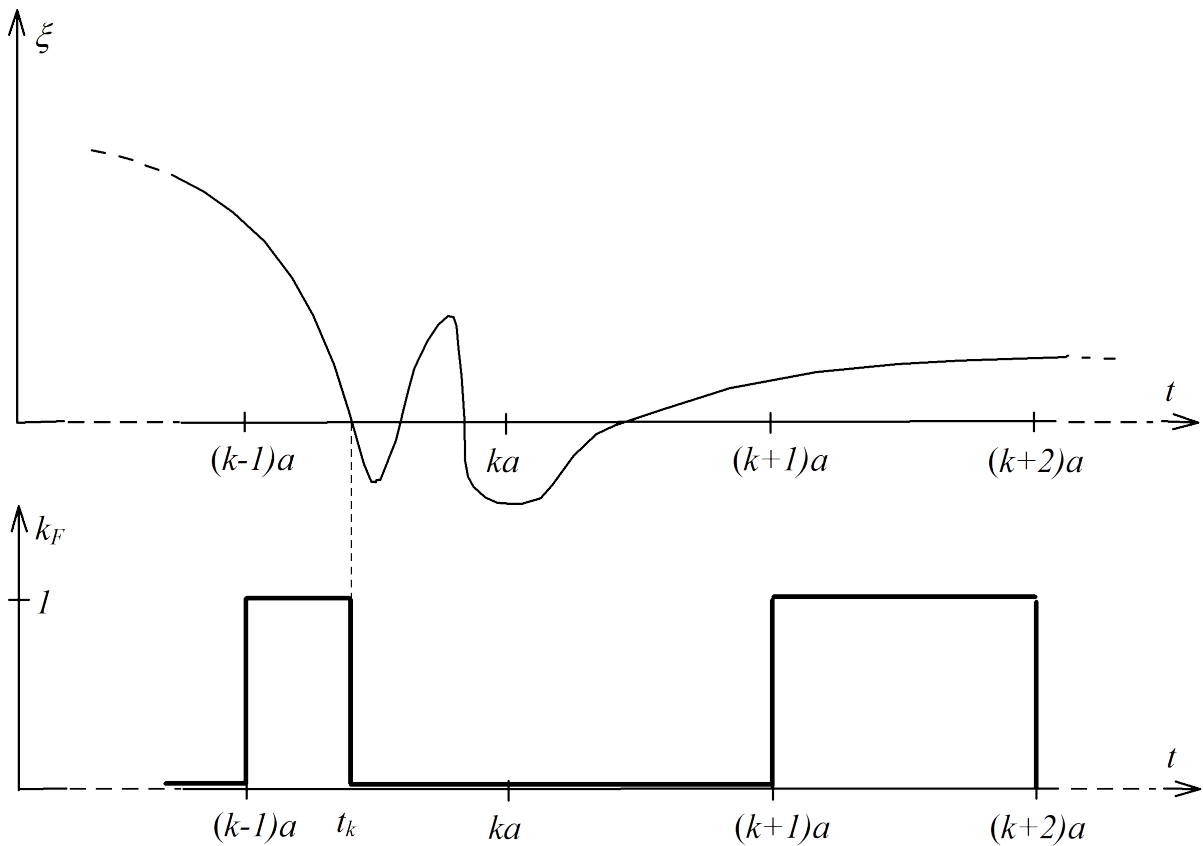


Рис. 7.2.

Пусть t_k - момент окончания импульса в пределах тактового интервала.

- 2) Если $\xi|_{t=(k-1)a+0} \leq 0$, то $t_k = (k-1)a$. Следовательно длительность импульса равна нулю (см. интервал $ka < t < (k+1)a$ рис. 7.2).
- 3) Если $\xi|_{t=(k-1)a+0} > 0$ и уравнение $\xi(t) = 0$ внутри тактового интервала $(k-1)a < t < ka$ имеет корни, то t_k - наименьший корень уравнения $\xi(t) = 0$ (см. интервал $(k-1)a < t < ka$ на рис. 7.2).
- 4) Если $\xi(t) > 0$ в пределах тактового интервала, то длительность импульса равна величине тактового интервала (см. интервал $(k+1)a < t < (k+2)a$ на рис. 7.2).

Введем обозначения

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_H} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Математическая модель примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + Bk_F(\xi), \\ \xi(X, t) &= U_{\kappa y} - U_n, \quad U_{\kappa y} = \alpha(U_y - \beta x_2), \\ U_n &= U_{on} \left(\frac{t}{a} - E_1 \left(\frac{t}{a} \right) \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Функция $k_F(\xi)$ принимает значения 1 или 0 в соответствии с указанными выше принципами формирования импульса.

Параметры модели

$$\Pi = \{R, L, C, R_H, E_0, U_y, U_{on}, \alpha, \beta, a\}.$$

Все дальнейшие расчеты проводились при следующих значениях параметров

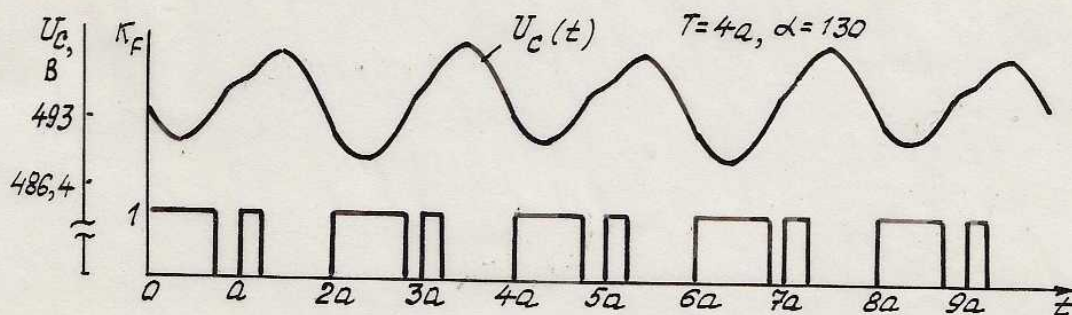
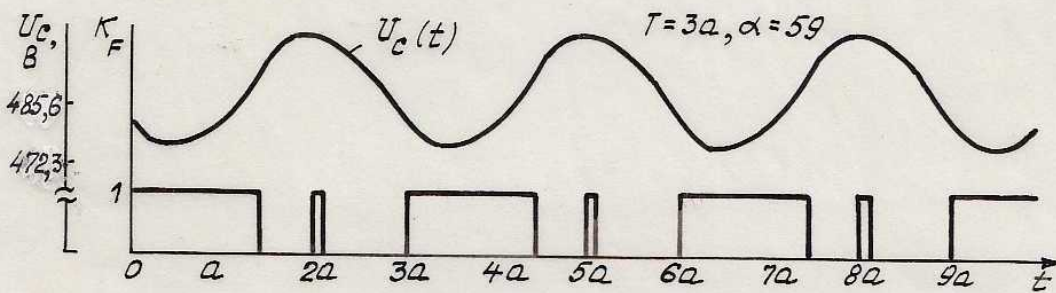
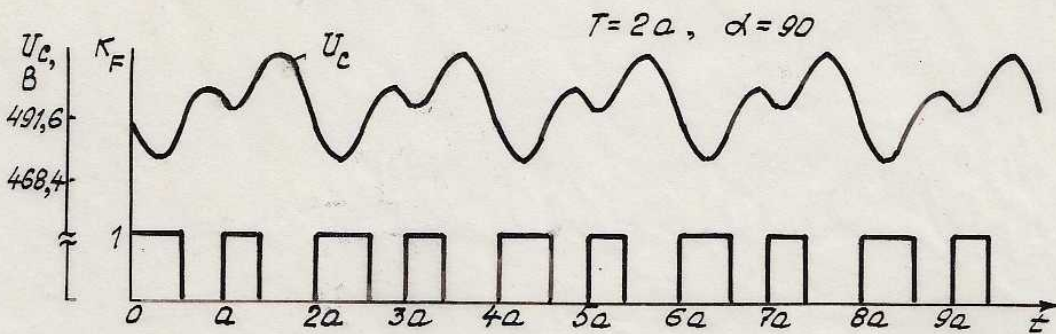
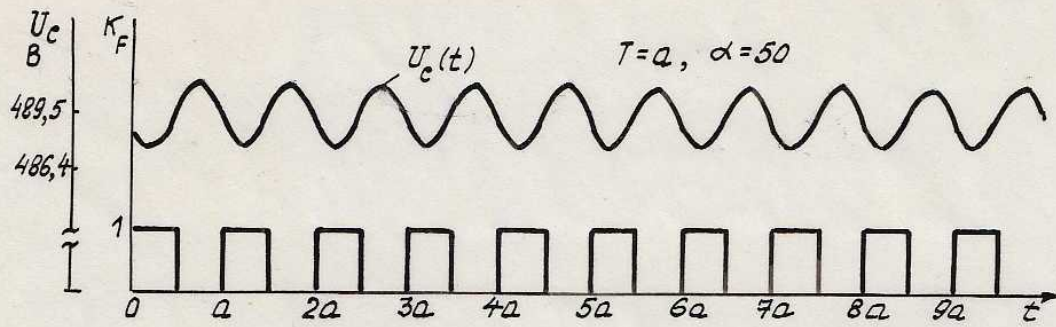
$$R=10,6 \text{ Ом}; L=0,1 \text{ Гн}; C=10^{-6} \text{ Ф}; R_H=100 \text{ Ом};$$

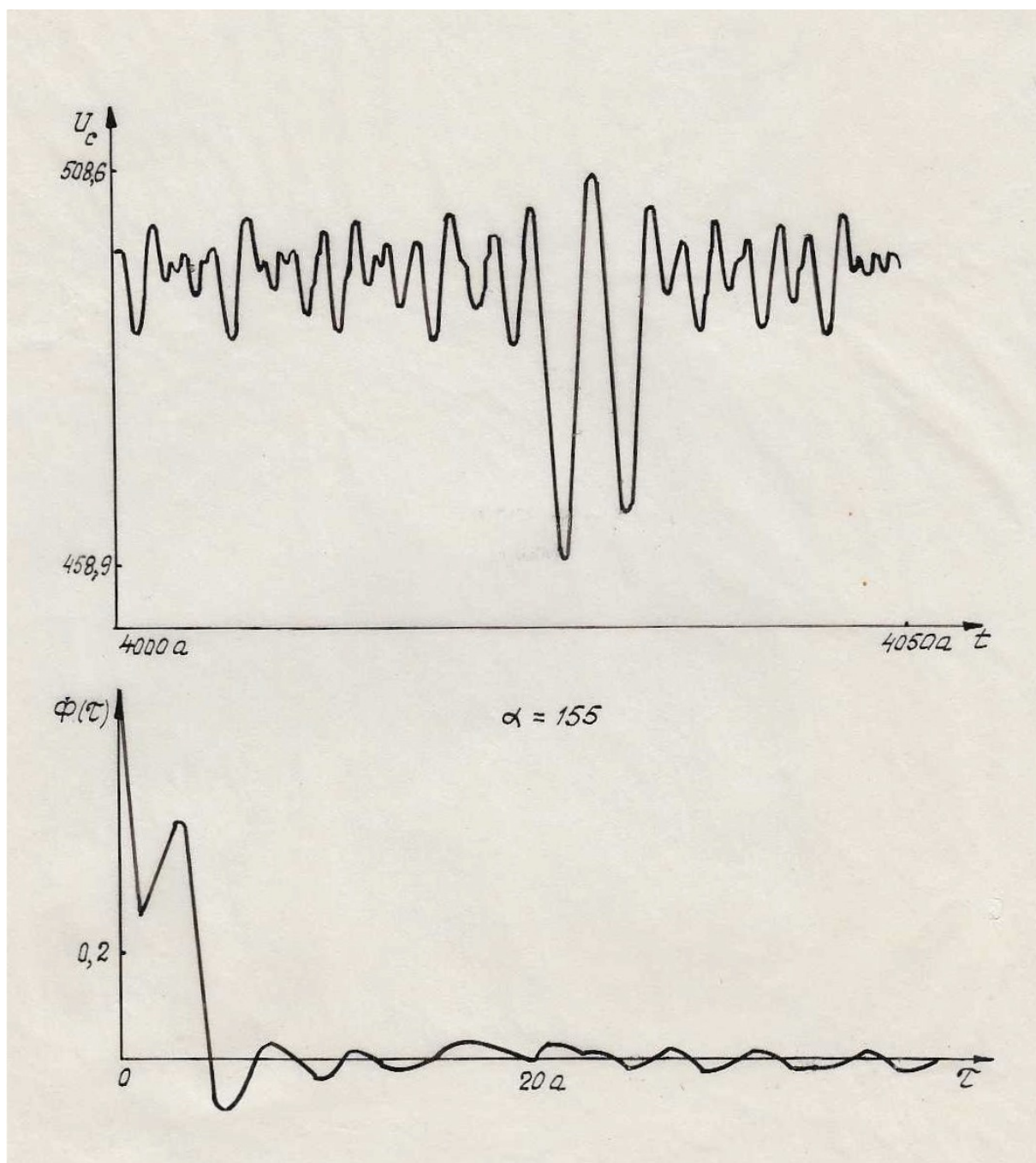
$$E_0=1040 \text{ В}; U_y=5 \text{ В}; U_{on}=10 \text{ В};$$

$$\beta=0,01; a=10^{-4} \text{ с}; \alpha>0.$$

Таким образом, все параметры, за исключением коэффициента усиления, фиксированы.

Поскольку внешнее периодическое воздействие определяется только периодом квантования a , то, если существует периодическое решение $X_c(t)$, его период будет равен $T=ma$, $m=1,2,\dots$. Периодическое решение, соответствующее каждому m , будем называть m -циклом. 1-циклом называют колебания на основной частоте, а m -циклами с $m>1$ - субгармоническими колебаниями. На рис. 7.3 приведены результаты счета задачи Коши с нулевыми начальными условиями для различных





коэффициентов усиления. Изображены кривые, соответствующие периодическим движениям, или m - циклам. Нетрудно подсчитать, что с ростом m величина пульсаций выходного напряжения

$$k_p = \frac{1}{U_{cp}} \max_{0 < t < T} |U_c(t) - U_{cp}|, \quad U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T U_c(t) dt$$

будет нарастать. С позиций проектирования наиболее подходящим представляется 1 - цикл. Поэтому важно разобраться в закономерностях возникновения тех или иных m - циклов с целью обеспечения динамики стабилизатора в нужном режиме. Особенно важно выяснить причину возникновения хаотической динамики. В качестве таковой приведены результаты расчета задачи Коши, выведенные на печать через 4000 тактовых интервала (рис.7.4.). Внизу приведен график автокорреляционной функции, свидетельствующий о случайном характере динамики выходного напряжения стабилизатора. Ясно, что стабилизатор с такими пульсациями напряжения не пригоден для эксплуатации. На рис. 7.5 показаны данные осциллограммы выходного напряжения стабилизатора, соответствующие коэффициентам усиления $\alpha=50$ и $\alpha=90$.

Хорошее совпадение с результатами численных расчетов дают основание сделать вывод о высокой степени адекватности модели.

7.2. Преобразования модели

Собственные числа матрицы A при выбранных параметрах вещественны

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_H} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_H} \right)^2 - \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R}{R_H} \right)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_H} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_H} \right)^2 - \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R}{R_H} \right)}.$$

Это позволяет преобразовать уравнения (7.1) к более простому виду в вещественной форме

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \lambda_1(\omega_1 - k_F), \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \lambda_2(\omega_2 - k_F), \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{E_0/L}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2 + R/L}{\lambda_1} \omega_1 - \frac{\lambda_1 + R/L}{\lambda_2} \omega_2 \right) \\ x_2 &= \frac{E_0/L}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{\omega_1}{\lambda_1} - \frac{\omega_2}{\lambda_2} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Получая те или иные результаты в переменных ω_1, ω_2 , с помощью зависимости (7.3) всегда можно перейти к переменным x_1, x_2 .

На основании третьего принципа формирования импульса в пределах тактового интервала следует

$$k_F(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)a < t < t_k \\ 0, & t_k < t < ka, \quad k = 1, 2, K \end{cases}$$

В области $(k-1)a < t < t_k$ система (7.2) принимает вид

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i(\omega_i - 1), \quad i = 1, 2$$

с условием

$$\omega_i((k-1)a) = \omega_{ik-1}.$$

Решение этой системы легко находится

$$\omega_i(t) = 1 + (\omega_{ik-1} - 1)e^{\lambda_i(t - (k-1)a)}.$$

Отсюда следует

$$\omega_i(t_k) = 1 + (\omega_{ik-1} - 1)e^{\lambda_i(t_k - (k-1)a)}.$$

В области $t_k < t < ka$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i, \quad \omega_{i(t)} = \omega_i(t_k)e^{\lambda_i(t - t_k)}.$$

Отсюда следует

$$\omega_i(ka) = \omega_{ik} = \omega_i(t_k)e^{\lambda_i(ka - t_k)}$$

или

$$\omega_{ik} = (\omega_{ik-1} - 1)e^{a\lambda_i} + e^{\lambda_i(ka-tk)}.$$

Введем обозначение

$$\frac{t}{a} = z + k - 1, \quad \frac{t_k}{a} = z_k + k - 1.$$

Здесь z_k - относительный момент коммутации, или коэффициент заполнения. С учетом принципов формирования импульса, $0 \leq z_k \leq 1$.

Зависимость между ω_{ik} и ω_{ik-1} примет вид

$$\begin{aligned} \omega_{1k} &= \omega_{1k-1}e^{a\lambda_1} + e^{a\lambda_1(1-z_k)} - e^{a\lambda_1}, \\ \omega_{2k} &= \omega_{2k-1}e^{a\lambda_2} + e^{a\lambda_2(1-z_k)} - e^{a\lambda_2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Эти соотношения следует дополнить уравнением для вычисления z_k .

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{LC\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha\beta E_0} \xi(X(t), t) = \\ &= v(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z} - (1 - \omega_{1k-1})e^{a\lambda_1 z} - \frac{P}{\alpha}z + q - v + 1, \end{aligned}$$

где

$$v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad P = \frac{U_{on}(\lambda_1 - \lambda_2)(R + R_H)}{\beta E_0 R_H \lambda_2}, \quad q = \frac{U_y}{U_{on}} P.$$

Если момент коммутации t_k находится внутри тактового интервала, то он является корнем уравнения

$$\xi(X(t), t) = 0$$

и, следовательно, для его нахождения надо решать уравнение $\varphi(z) = 0$.

Однако учет принципов формирования импульса вносит специфику в нахождение z_k . На основании второго принципа формирования импульса следует, что $z_k = 0$, если $\varphi(0) \leq 0$.

Докажем, что если $\varphi(0) > 0$, $\varphi(1) < 0$, то уравнение $\varphi(z) = 0$ имеет единственный корень. Доказательство проведем для конкретно выбранных параметров, при которых

$$a\lambda_1 = -0,8857; a\lambda_2 = -0,1249$$

$$v = 7,0913; P = 6,4777; q = 3,2388.$$

Рассмотрим различные варианты, выписав предварительно выражения для производных

$$\frac{d\varphi}{dz} = a\lambda_1 \left[(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z} - (1 - \omega_{1k-1})e^{a\lambda_1 z} \right] - \frac{P}{\alpha},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = (a\lambda_1)^2 \left[\frac{1}{v}(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_1 z} - (1 - \omega_{1k-1})e^{a\lambda_1 z} \right].$$

1) $\omega_{1k-1} < 1$. Из неравенства $\varphi(0) = \omega_{1k-1} - v\omega_{2k-1} + q > 0$ следует

$$\omega_{2k-1} < \frac{\omega_{1k-1} + q}{v} < \frac{1+q}{v} < 1.$$

Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z) = -\infty,$$

то $\varphi(z)$ имеет точку экстремума в виде максимума. Докажем, что это единственная точка экстремума. Если это не так, то возможно существование двух точек экстремума в виде максимума и одной между ними - в виде минимума. Следовательно, возможна неединственность точек перегиба. Однако из выражения для $d^2\varphi/dz^2$ следует существование единственной точки перегиба. Если предположить, что в интервале $0 < z < 1$ функция $\varphi(z)$ имеет неединственный корень, то она должна иметь и неединственный экстремум. А это невозможно.

2) $\omega_{1k-1} > 1$, $\omega_{2k-1} < 1$. В этом случае $d\varphi/dz < 0$, что обеспечивает единственность корня функции $\varphi(z)$.

3) $\omega_{1k-1} > 1$, $\omega_{2k-1} > 1$. Пусть z_0 - точка экстремума.

Из выражения для $d\varphi/dz$ следует

$$(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z_0} - (1 - \omega_{1k-1})e^{a\lambda_1 z_0} = \frac{P}{a\lambda_1 \alpha}.$$

Используя эту зависимость, находим

$$\begin{aligned}
\varphi(z_3) &= \left[(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z_3} - (1 - \omega_{1k-1})e^{a\lambda_1 z_3} \right] + \\
&+ (v-1)(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z_3} - \frac{P}{\alpha} z_3 + q - v + 1 = \\
&= \frac{P}{a\lambda_1 \alpha} + (v-1)(1 - \omega_{2k-1})e^{a\lambda_2 z_3} - \frac{P}{\alpha} z_3 + q - v + 1.
\end{aligned}$$

Если в области $0 < z < 1$ уравнение $\varphi(z) = 0$ имеет неединственный корень, то существует $0 < z_3 < 1$, в которой $\varphi(z_3) \geq 0$. Однако из полученного выше выражения следует, что $\varphi(z_3) < 0$.

На основании проведенного исследования функции $\varphi(z)$ легко доказать, что если $\varphi(0) > 0$, $\varphi(1) \geq 0$, то уравнение $\varphi(z) = 0$ не имеет корней в области $0 < z < 1$. Из 4-го принципа формирования импульса следует, что в этом случае $z_k = 1$.

Пусть $0 < z_* < 1$ корень уравнения $\varphi(z) = 0$. Таким образом, относительный момент коммутации определяется в соответствии с алгоритмом

$$z_k = \begin{cases} 0, & \varphi(0) \leq 0 \\ 1, & \varphi(0) > 0, \quad \varphi(1) \geq 0 \\ z_*, & \varphi(0) > 0, \quad \varphi(1) < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Рекуррентные соотношения (7.4) и алгоритмы нахождения относительного момента коммутации (7.5) носят названия отображения последования. Мы будем их называть просто отображением. По числу переменных это отображение называют двумерным. Таким образом, исследование свойств системы (7.1) сводится к исследованию свойств отображения (7.4), (7.5). Конечно, переход от дифференциальных уравнений к отображению вносит определенные удобства в реализацию модели (7.1). Вместо интегрирования системы дифференциальных уравнений с преодолением сопутствующих проблем (выбор численной схемы, поиск моментов коммутации) приходится иметь дело с рекуррентными соотношениями, дающими точное решение (разумеется, в пределах точности представления чисел в ЭВМ). Однако, это несколько не снижает

исключительной сложности задачи поиска периодических решений и исследования их устойчивости.

Поиск m -циклов с помощью отображения (7.4), (7.5) можно осуществлять установлением: задавая ω_{10} , ω_{20} , из (7.5) находим z_1 , затем вычисляем ω_{11} , ω_{12} с помощью (7.4); далее находим z_2 из (7.5) и т.д., до тех пор, пока не произойдет установления. Однако этот путь практически ничего не дает по сравнению с решением задачи Коши для системы (7.1) с точки зрения выяснения закономерностей возникновения m -циклов в зависимости от коэффициента усиления. Непосредственный поиск m -циклов, используя условия периодичности, можно свести к системе уравнений относительно компонент вектора начальных условий для периодического движения ω_{1c} , ω_{2c} , определяемых из решения системы уравнений

$$\omega_{1c} - \omega_{1m}(\omega_{1c}, \omega_{2c}) = 0, \quad \omega_{2c} - \omega_{2m}(\omega_{1c}, \omega_{2c}) = 0. \quad (7.6)$$

Однако, найти решения этой системы оказалось очень сложно. Все дальнейшие результаты расчета m -циклов были получены с помощью системы уравнений относительно моментов коммутации

$$\psi_k(z_1, z_2, K, z_m) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7.7)$$

полученной в [14] на основе уравнений (7.6). Устойчивость m -циклов исследовалась на основе теории, развитой в [15].

7.3. Анализ картины ветвления

Результаты расчета m -циклов представлены таблицей 7.1. В первой колонке указан номер m , соответствующий локально устойчивому m -циклу. Во второй колонке указан диапазон по α , соответствующий каждому из m -циклов. В последней колонке указана величина диапазона по α , в котором существует устойчивый m -цикл. Информация об m -циклах, приведенная в табл. 7.1 не отражает всех свойств динамики

стабилизатора, которые были выявлены при решении системы (7.7). Эти свойства отражает график, названный в [14]

Таблица 7.1

m	α	$\Delta\alpha$
1	$0 < \alpha \leq 86,58$	86,58
2	$86,59 \leq \alpha \leq 126,84$	40,25
4	$126,85 \leq \alpha \leq 137,96$	11,11
8	$137,97 \leq \alpha \leq 140,41$	2,44
16	$140,42 \leq \alpha \leq 140,94$	0,52
32	$140,95 \leq \alpha \leq 141,06$	0,11
3	$52,67 \leq \alpha \leq 61,5$	8,83
6	$62,0 \leq \alpha \leq 68,00$	6,00
12	$68,006 \leq \alpha \leq 68,0153$	0,0147
5	$144,6 \leq \alpha \leq 144,85$	0,25
10	$144,86 \leq \alpha \leq 144,92$	0,06
20	$144,94 \leq \alpha \leq 144,95$	0,01
7	$144,26 \leq \alpha \leq 144,30$	0,04
14	$144,31 \leq \alpha \leq 144,325$	0,015
9	$66,56 \leq \alpha \leq 66,78$	0,22
15	$68,68 \leq \alpha \leq 68,698$	0,018
21	$68,393 \leq \alpha \leq 68,4$	0,027
6	$136,526 \leq \alpha \leq 137,1$	0,574
12	$137,2 \leq \alpha \leq 137,3$	0,1

картиной ветвления (рис.7.6). По горизонтальной оси идет отсчет коэффициента усиления, по вертикальной - величина m , соответствующая m -циклу. Отрезки прямых, параллельных горизонтальной оси и отвечающие какому-либо m указывают, что для соответствующих α существует устойчивый m -цикл. Вся картина ветвления изображается в

виде так называемых ветвей V_{ij} - первый индекс указывает с какого m -цикла начинается ветвь, второй - номера ветвей, начинающиеся с одного и того же m . Ветвь V_{11} начинается с 1-цикла, который существует при всех $\alpha > 0$. Однако при $\alpha_{11}^{(1)} \approx 86,58$ 1-цикл теряет устойчивость и возникает устойчивый 2-цикл. Параметр $\alpha_{11}^{(1)}$ называется бифуркационным, или, как мы будем говорить, параметром мягкого возникновения 2-цикла. Слово «бифуркация» используется в связи с тем, что при $\alpha_{11}^{(1)}$ из одного устойчивого 1-цикла рождается 2 решения - одно из них - неустойчивый 1-цикл, другое - устойчивый 2-цикл. Мягкое возникновение 2-цикла означает непрерывность периодического движения по параметру α . С дальнейшим ростом α , начиная с $\alpha_{11}^{(2)} \approx 126,84$ теряет устойчивость 2-цикл и мягко возникает устойчивый 4-цикл, и так далее. С ростом m диапазон по α существования m -цикла сужается, так что последовательность бифуркационных параметров $\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \dots$ сходится к некоторому α_{11}^* , отвечающему апериодическому движению (m -цикл с $m=\infty$). Параметр $\alpha_{11}^* \approx 141,06$ назовем точкой сгущения ветви V_{11} , а саму эту ветвь назовем основой. Таким образом, ветвь V_{11} начинается с 1-цикла и образуется в результате множественных бифуркаций с удвоением периода. Все другие ветви начинаются с параметров, отвечающих так называемому жесткому возникновению m -цикла. 3-цикл возникает при $\alpha_{31} \approx 52,67$. С ростом от этого 3-цикла ответвляются два 3-цикла - один из них неустойчив, другой устойчив до параметра бифуркации $\alpha_{31}^{(1)} \approx 61,5$. Потеря устойчивости 3-цикла при $\alpha_{31}^{(1)}$ сопровождается мягким возникновением устойчивого 6-цикла, и т. д.. Последовательность бифуркационных параметров $\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{31}^{(2)}, \dots$ сходится к точке сгущения ветви V_{31} . В таблице 7.2 приведены характеристики

двух 3-циклов для различных α , начиная с $\alpha=53$, близкому к параметру жесткого возникновения 3-цикла. Для каждого из решений указаны относительные моменты коммутации и мультипликаторы,

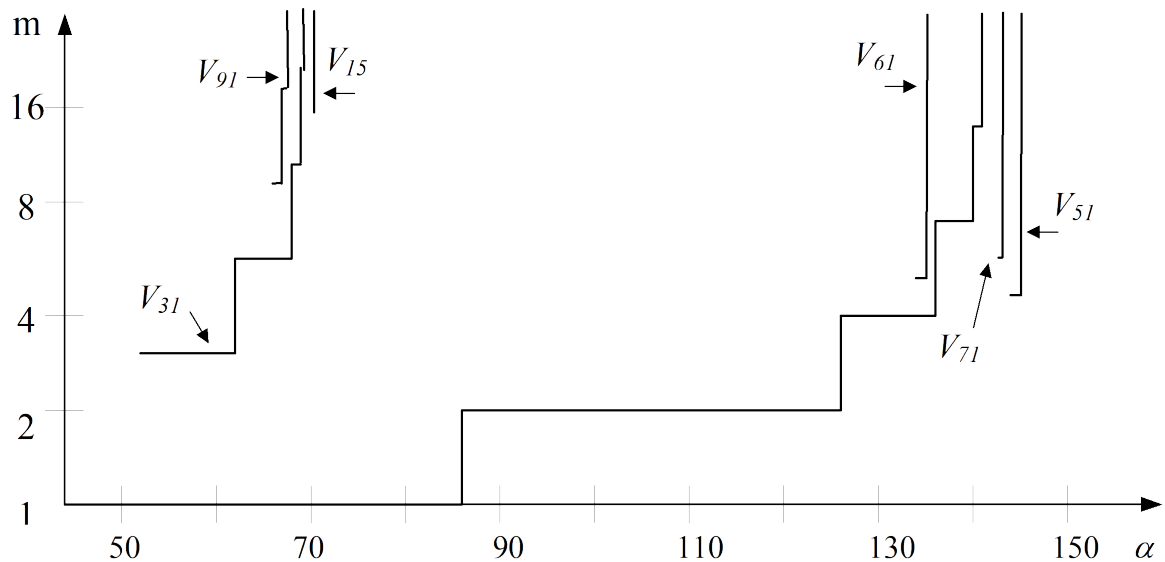


Рис. 7.6.

Таблица 7.2

	1-е решение					2-е решение				
α	z_1	z_2	z_3	ρ_1	ρ_2	z_1	z_2	z_3	ρ_1	ρ_2
53	1	0,4218	0,1331	-0,0785	-0,6144	0,9937	0,4176	0,1441	2,1162	0,0228
55	1	0,4332	0,1216	-0,0707	-0,6819	0,9658	0,4054	0,1866	2,3326	0,0207
57	1	0,4446	0,1099	-0,0632	-0,7627	0,9480	0,3953	0,2163	2,5065	0,0192
59	1	0,4560	0,0982	-0,0564	-0,8555	0,9362	0,3863	0,2385	2,6695	0,0181
61	1	0,4673	0,0866	-0,0503	-0,9596	0,9284	0,3780	0,2559	2,8336	0,0170
75	1	0,5374	0,0142	-0,0256	-1,8871	0,9222	0,3299	0,3162	4,2317	0,0114
80	1	0,5516	0	-0,0454	-1,0619	0,9275	0,3157	0,3264	4,8417	0,0100
85	1	0,5528	0	-0,0441	-1,0947	0,9338	0,3029	0,3342	5,4972	0,0088
150	1	0,5613	0	-0,0356	-1,3542	0,9988	0,2081	0,3725	15,4199	0,0031
195	1	0,5639	0	-0,0334	-1,4458	---	---	---	---	---
∞	1	0,5729	0			---	---	---	---	---

характеризующие устойчивость. Первое решение, теряя устойчивость при $\alpha_{31}^{(1)}$, продолжает существовать вплоть до $\alpha = \infty$. Второе решение неустойчиво и существует лишь до $\alpha \approx 150$.

Чем же отличаются параметры мягкого возникновения от параметров жесткого возникновения m -цикла? При мягком возникновении $2m$ -цикла всегда присутствует предшественник в виде устойчивого m -цикла. При жестком возникновении m -цикла такой предшественник отсутствует при любых m .

Диапазон существования по α некоторых ветвей настолько узок, что они представлены на рис. 7.6 в виде вертикальных линий.

Полученная картина ветвления, конечно, не полная. Выделены лишь те ветви, начало которых удалось рассчитать. Но и эти результаты приводят к крайне интересным выводам. Прежде всего становятся понятными результаты расчета m - циклов установлением, представленные на рис. 7.3. Действительно, $\alpha = 50; 90; 130$ соответствуют диапазонам существования соответственно 1-цикла, 2-цикла и 4-цикла. При $\alpha = 59$ устойчивы 1-цикл и 3-цикл. Выход решения задачи Коши на 3-цикл свидетельствует о том, что начальные условия $X(0) = 0$ оказались в области притяжения 3-цикла. Существование диапазонов по α , в котором имеются устойчивые 1-цикл и 3-цикл наводят на мысль о том, что в условиях помех стабилизатор будет функционировать либо в одном, либо в другом устойчивом m -циклах. Далее показано, что это действительно так.

7.4. Численные эксперименты и возможная причина возникновения хаотической динамики

Прежде чем переходить к численным экспериментам, надо четко выяснить понятия «помеха» и «величина помехи». Пусть $\bar{X}$ - невозмущенное движение, определяемое системой

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X).$$

Возмущенное движение X определяется системой

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X) + \eta(t, X).$$

Параметры объекта (т.е. стабилизатора) неизменны. Вектор-функцию $\eta(t, X)$ назовем помехой или помехообразующим фактором. Конечно, предлагаемый вариант введения помехи лишь один из многих возможных. Разность между возмущенным движением обозначим

$$\varepsilon(t) = X(t) - \bar{X}(t).$$

Под величиной помехи будем иметь в виду

$$\delta = \max_t \left\{ \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \right\}^{1/2}.$$

Пусть $r_1(\alpha)$, $r_3(\alpha)$ - радиусы областей притяжения, соответственно, 1-цикла и 3-цикла. Возможны следующие варианты динамики стабилизатора в условиях помех:

- 1) $r_1 \gg r_3$, $\delta > r_3$ - будет иметь место динамика в окрестности 1-цикла;
- 2) $r_1 \ll r_3$, $\delta > r_1$ - будет иметь место динамика в окрестности 3-цикла;
- 3) $r_1 \approx r_3$, $\delta > r_1$ - возможна равновероятная динамика в окрестности 1-цикла и 3-цикла.

Численные расчеты радиусов областей притяжения дали следующие результаты:

α	r_1	r_3
53	224,7	0,01
55	0,34	0,06
59	0,27	0,1

Отсюда следует, что третьему варианту динамики лучше всего подходит $\alpha=59$.

Следующий вопрос, который надо решить - как вводить помеху? Для проведения численных экспериментов помеха накладывалась на входное напряжение, которое в возмущенном состоянии записывалось в виде

$$\tilde{E} = E_0 + \gamma(t)$$

$$\gamma(t) = (-1)^{\tau_1} \frac{\gamma_m}{4} \tau_2 \left\{ 1 + (-1)^{E_1\left(\frac{2t}{na}\right)} \right\} \{1 + \text{sign}(t_1 - t)\}$$

$$t_1 = naE_1\left(\frac{t}{na}\right) + \tau_2 \frac{a}{2}.$$

Здесь τ_1 - случайные целые числа с равномерным распределением в диапазоне от 0 до N ; τ_2 - случайные числа с равномерным распределением в диапазоне от 0 до 1. В расчетах принималось $N_I=1000$, $\gamma_m=10400$. Рассмотрим смысл сомножителей в выражении $\gamma(t)$, представляющем, очевидно, импульсную функцию. Первый сомножитель $(-1)^{\tau_1}$ определяет полярность импульса. Сомножитель $\gamma_m \tau_2$ - амплитуду импульса. Выражение в первой фигурной скобке, в зависимости от n , определяет частоту возникновения импульса. Наконец, выражение в последней фигурной скобке определяет длительность импульса, не превышающую $a/2$. Таким образом, возмущающее воздействие имеет случайную полярность, амплитуду и длительность. Величина n подбиралась в процессе проведения численных экспериментов. Если n невелико, в динамике системы превалирует случайность, определяемая помехой.

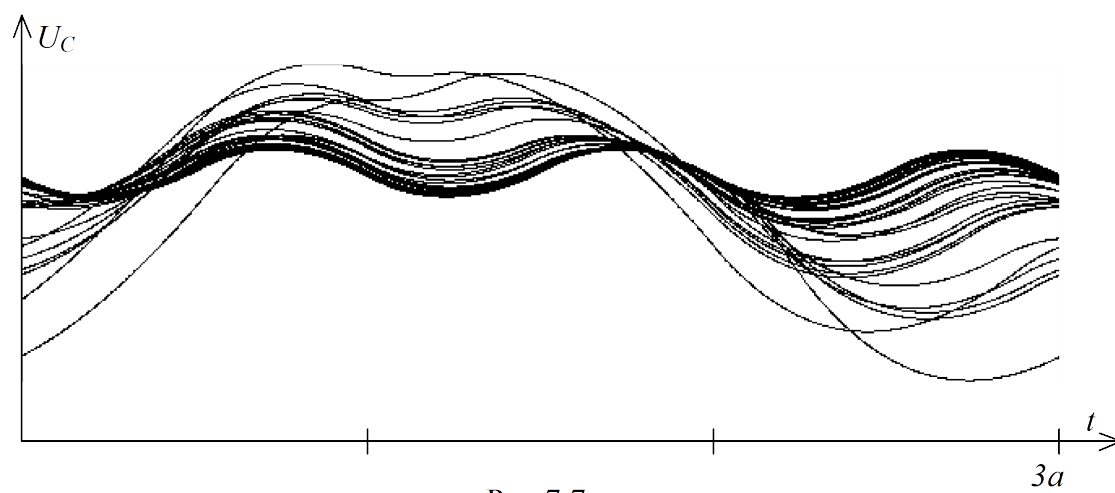


Рис.7.7.

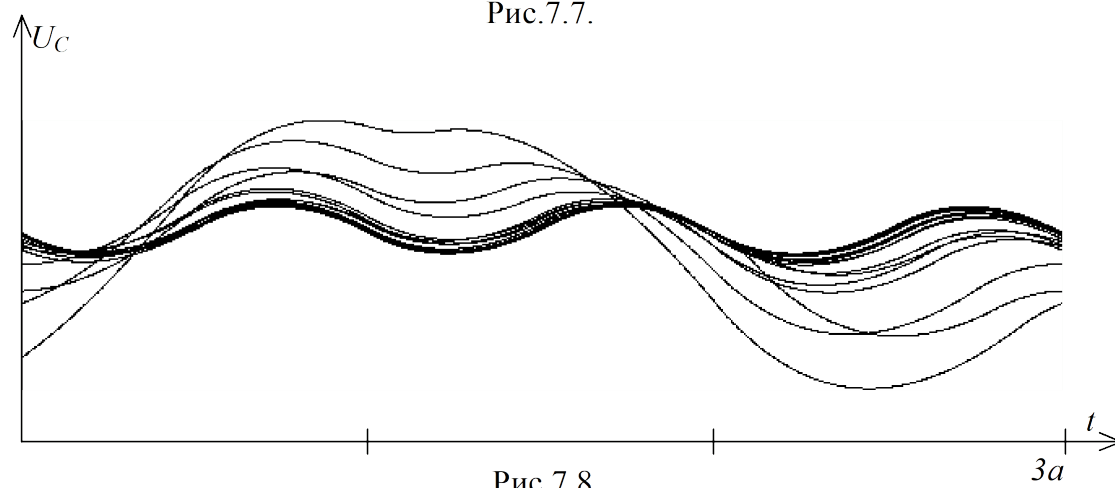


Рис.7.8.

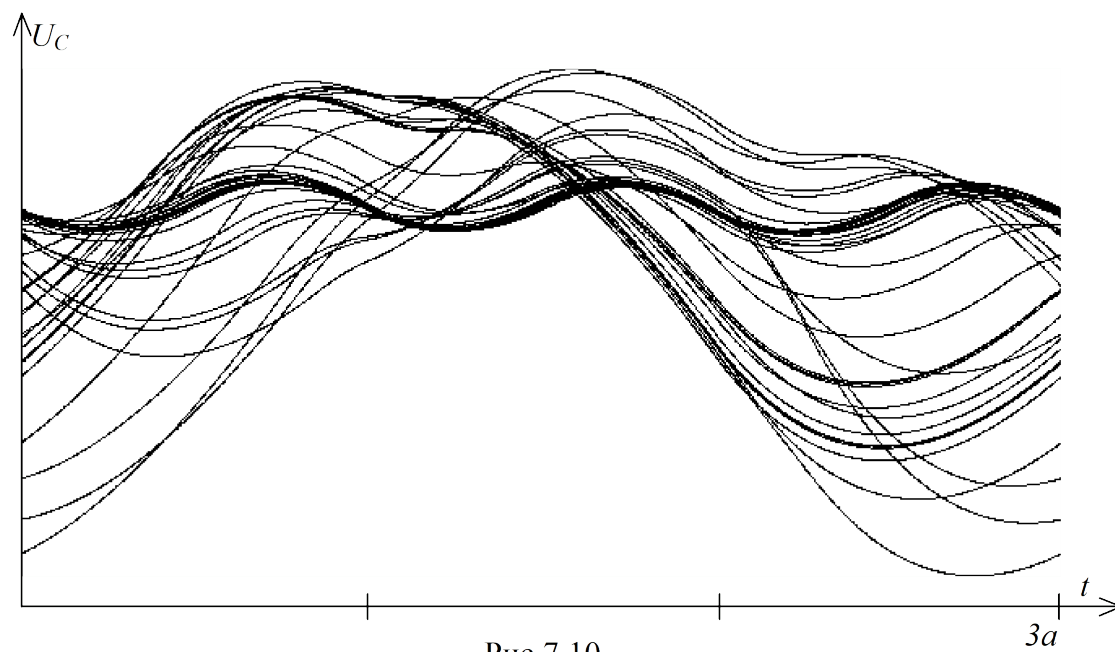
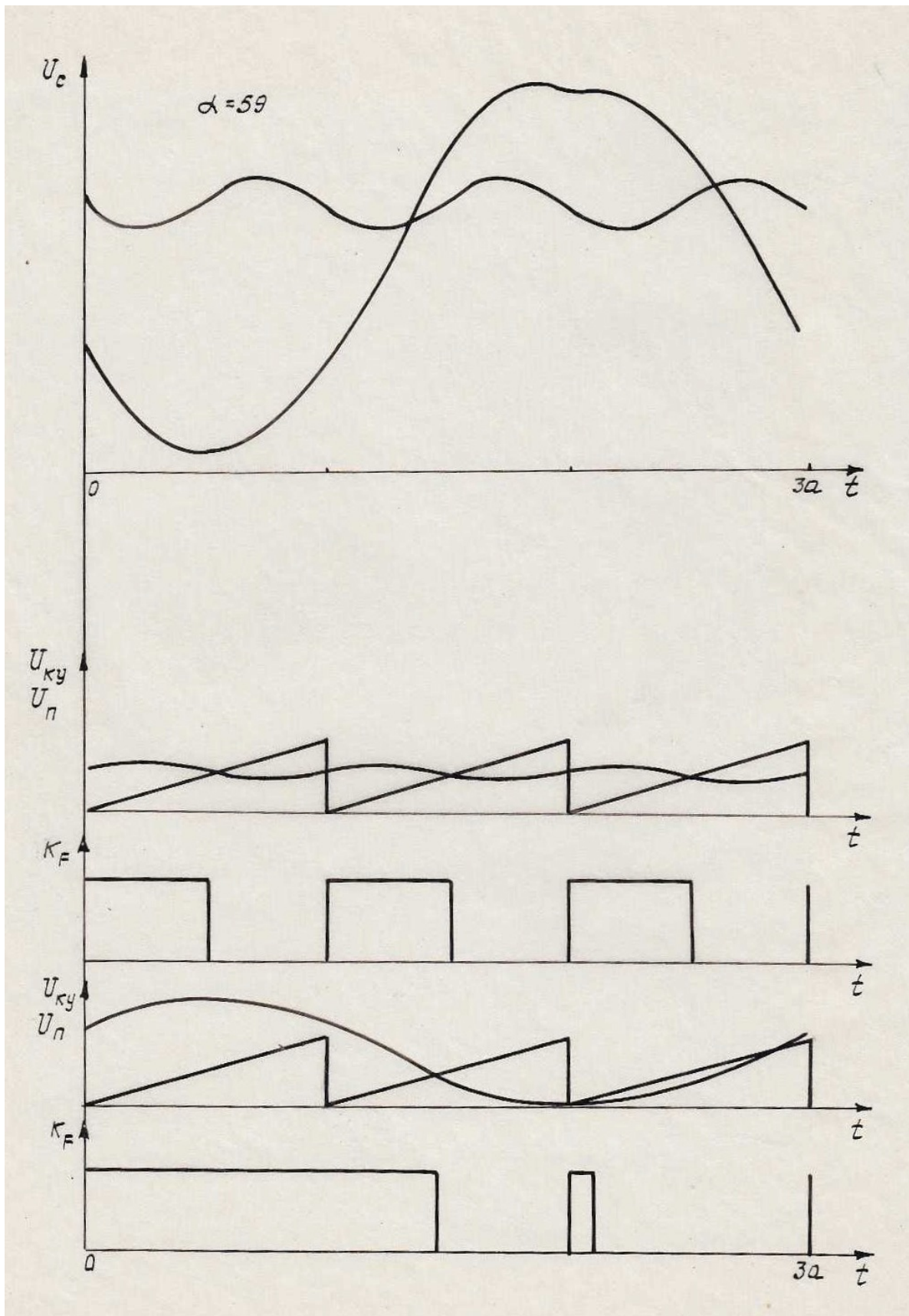


Рис.7.10.



Если n велико, - роль случайности, по сравнению с внутренними факторами в функционировании системы, уменьшается. Но при этом приходится делать расчет на достаточно большом временном интервале.

Динамика выходного напряжения, представленная на рис. 7.7, 7.8, 7.10 получалась следующим образом. Все расчеты проводились на временном интервале $(0, 144a)$. Кривые с интервалов $(k-1)a < t < (k+2)a$, $k = \overline{4, 142}$ переносили в один интервал $(0, 3a)$. Рис. 7.7, 7.8 отражают динамику выходного напряжения при $\alpha=50$. При таком α существует единственный устойчивый 1-цикл. Концентрация кривых в окрестности 1-цикла более четко выражена на рис. 7.8. Это объясняется меньшей частотой возникновения помехи, $m=24$. На рис. 7.9 изображены устойчивые 1-цикл и 3-цикл для $\alpha=59$. Эксперименты с помехами ($m=12$) даны на рис. 7.10. Как и ожидалось, концентрация кривых в окрестности 1-цикла и 3-цикла наиболее велика. Это полностью подтверждает высказанные ранее предположения о динамике стабилизатора.

Проведенные эксперименты позволяют высказать предположение о причинах возникновения стохастической и хаотической динамики. А именно, такая динамика может возникнуть, если

- 1) имеет место неединственность локально устойчивых стационарных движений;
- 2) величина помехи превосходит радиусы областей притяжения этих движений.

Но как объяснить причину хаотической динамики за пределами основной ветви V_{II} при $\alpha=155$ (см. рис. 7.4)? Попытки обнаружить численно или доказать неединственность m -циклов не привели к успеху. Если предположить, что за пределами основной ветви неединственность m -циклов отсутствует, то кроме указанных причин возникновения хаотической динамики должна существовать еще какая-то неизвестная причина. Здесь возможны 2 пути дальнейших исследований. Первый -

продолжать более тонкие исследования двумерного отображения (7.4), (7.5). Другой - попытаться разобраться с более простым отображением, на котором проявляется хаотизация, выяснить причины возникновения такой динамики, а потом возвратиться к модели стабилизатора. Именно этот второй путь реализован далее на примере простого отображения, о котором, казалось бы, уже все известно.

7.5. Анализ отображения Фейгенбаума

Это одномерное отображение имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_k &= \lambda \omega_{k-1} (1 - \omega_{k-1}), \\ k &= 1, 2, K, \quad 1 < \lambda < 4.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Оно обладает простым, легко доказуемым свойством: если $0 < \omega_0 < 1$, то $0 < \omega_k < 1$ при $k > 0$. Поэтому отображение (7.8) называют отображением отрезка прямой $(0,1)$ в себя. Иногда еще отображение (7.8) называют логистическим уравнением. Здесь это отображение названо именем Фейгенбаума, потому что именно на этом отображении М. Фейгенбаум обнаружил замечательное свойство, о котором будет сказано далее.

Под периодическим движением или m -циклом отображения (7.8) будем понимать последовательность различных чисел $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \dots, \omega_{cm}$, связанных зависимостью $\omega_{ck} = \lambda \omega_{ck-1} (1 - \omega_{ck-1})$, $k = \overline{1, m}$, $\omega_{c0} = \omega_{cm}$.

Очевидно, все ω_{ck} есть корни уравнения

$$\varphi_m(\omega_c) = \omega_c - \omega_m(\omega_c) = 0,\tag{7.9}$$

являющимся условием периодичности движения. Развитие вычислительной техники и средств вывода информации позволило получить для отображения (7.8) так называемую бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 7.11. Для большей детализации часть этой же картины приведена на рис. 7.12 в более узком диапазоне изменения λ . Алгоритм получения этих рисунков лучше проанализировать по блок-схеме рис. 7.13,а. Внешний цикл по λ включает в себя 2 цикла. Назначение

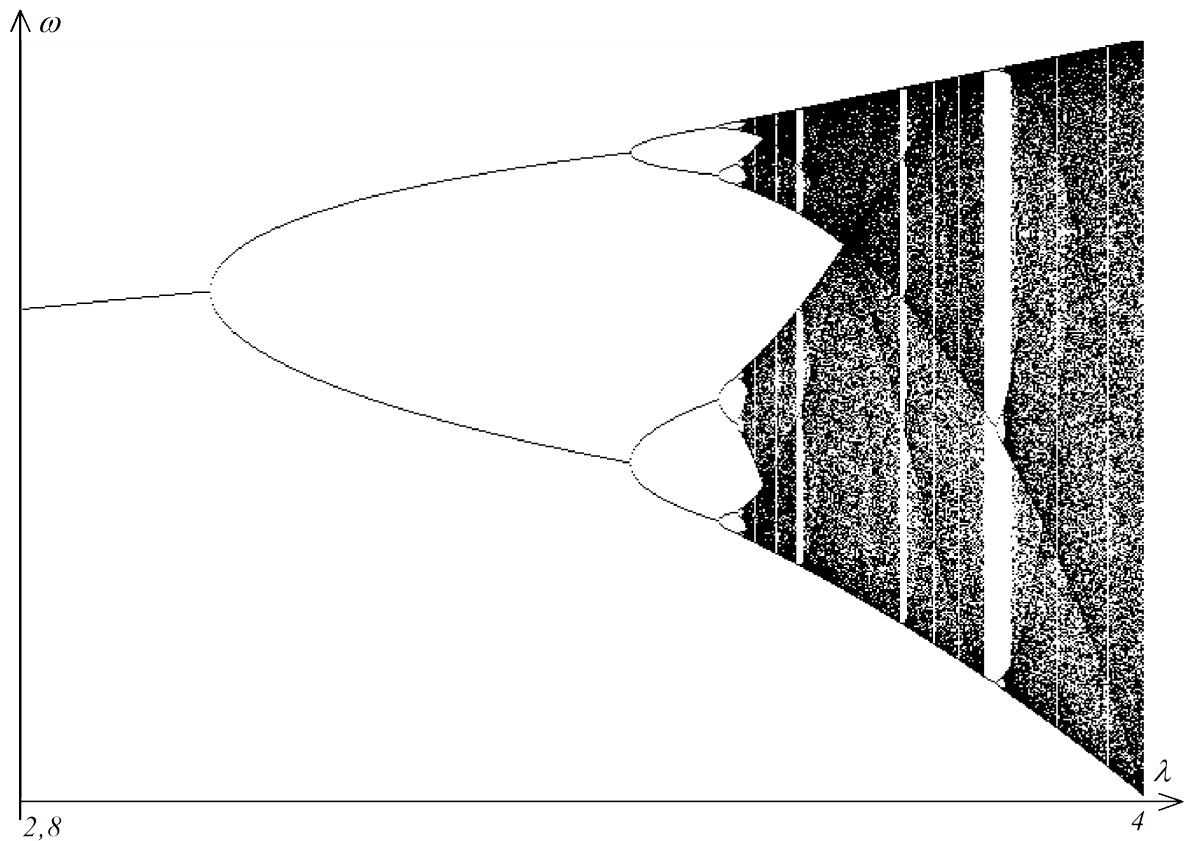


Рис. 7.11.

первого из них заключается в том, чтобы исключить переходной процесс. С этой целью N_U варьировалось в диапазоне $300 \div 1500$. Второй цикл предназначен для вывода установившегося (или неустойчившегося) решения. При этом N_p варьировалось в диапазоне $50 \div 300$. Картины рис. 7.11, 7.12 мало менялись при изменении N_U , N_p в указанных диапазонах. Рис. 7.11, 7.12 отражают свойство перемежаемости динамики отображения Фейгенбаума по параметру λ : интервалы детерминированности, когда хорошо просматриваются некоторые m -циклы, сменяются интервалами, в которых имеет место хаотическая динамика.

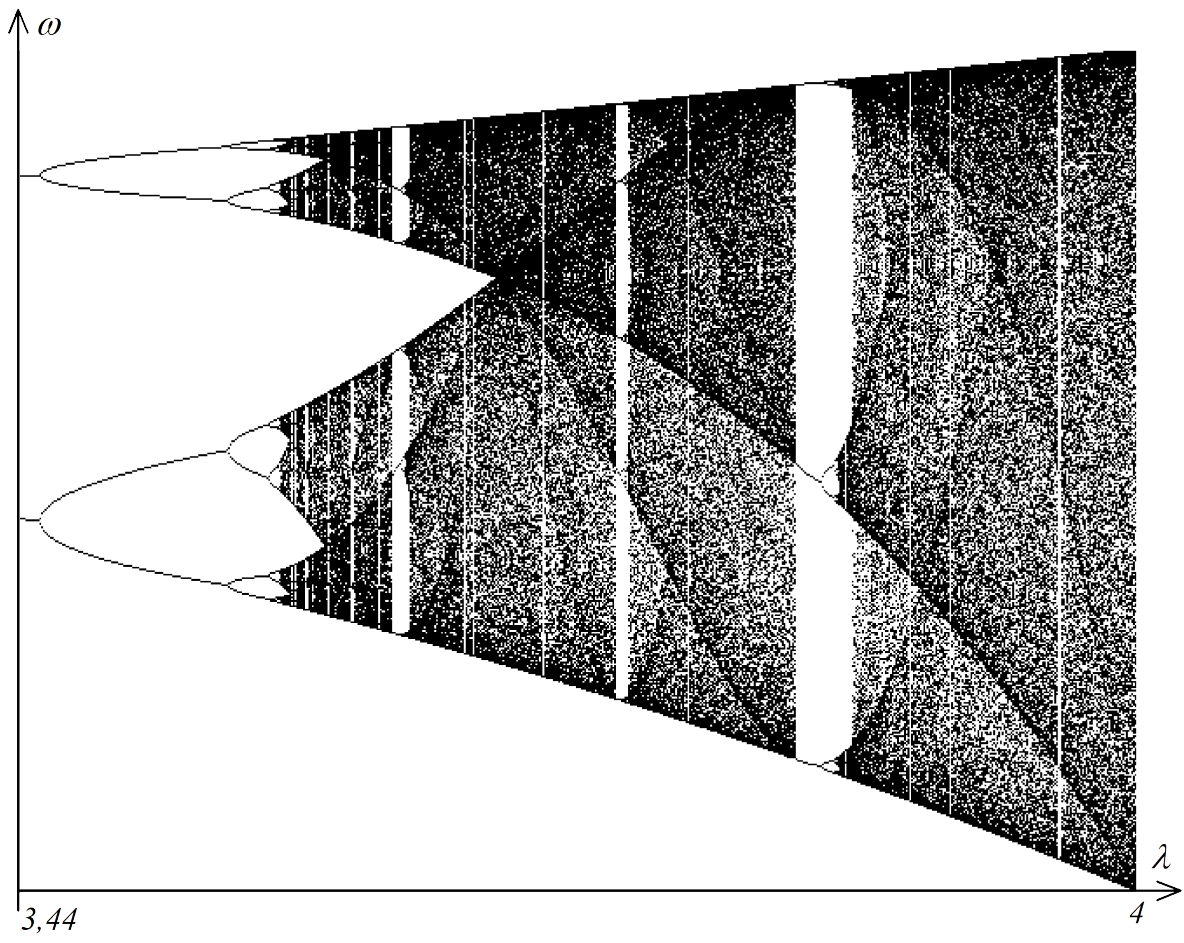


Рис. 7.12.

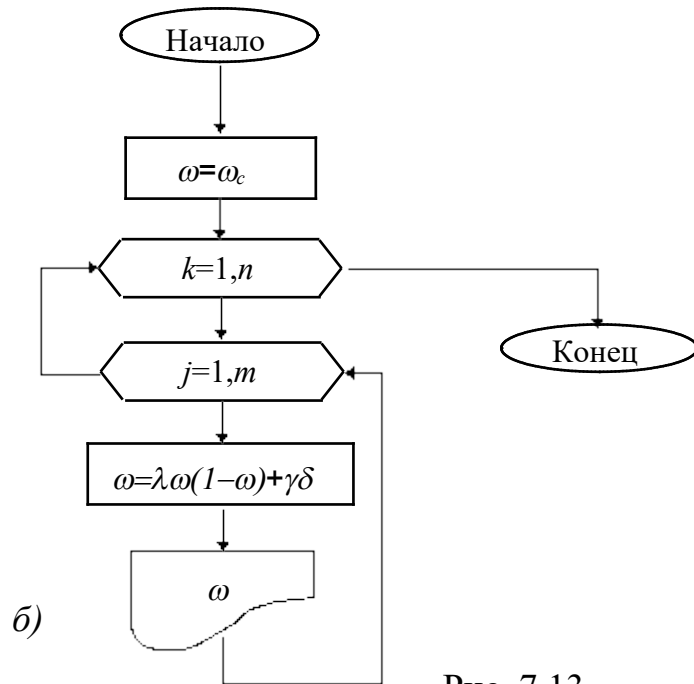
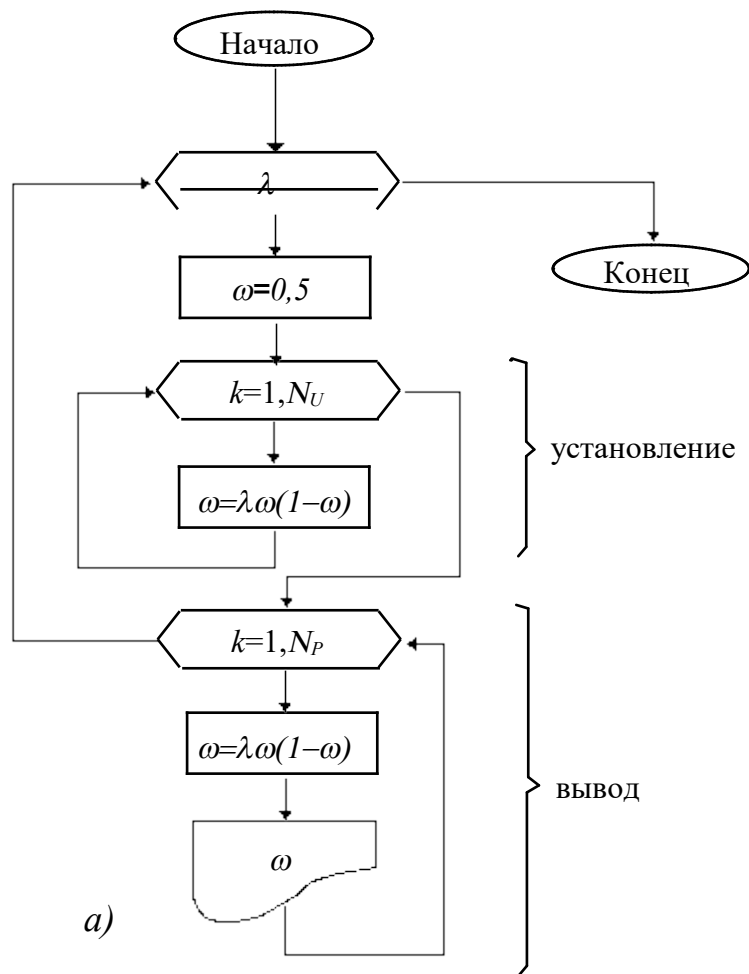


Рис. 7.13

Для исследования локальной устойчивости m - цикла, как обычно, представим возмущенное решение ω_k в виде

$$\omega_k = \omega_{ck} + \varepsilon_k.$$

Подставляя это возмущенное решение в (7.8) и линеаризуя относительно ε_k , найдем

$$\varepsilon_k = \lambda(1 - 2\omega_{ck-1})\varepsilon_{k-1}.$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_m = \rho_m \varepsilon_0, \quad \rho_m = \lambda^m \prod_{k=1}^m (1 - 2\omega_{ck}).$$

Условие локальной устойчивости

$$|\rho_m| < 1. \quad (7.10)$$

Рассмотрим теперь методику расчета m - циклов.

1) $m=1$. Уравнение (7.9)

$$\varphi_1(\omega_c) = \omega_c - \lambda\omega_c(1 - \omega_c) = 0.$$

Отбрасывая тривиальное решение $\omega_c=0$, найдем

$$\omega_c = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Исследование устойчивости дает следующие результаты

$$\rho_1 = 2 - \lambda, \quad |2 - \lambda| < 1 \rightarrow 1 < \lambda < 3.$$

2) $m=2$. Уравнение $\varphi_2(\omega_c)=0$ будет содержать в себе корни, отвечающие 1- циклу. Для нахождения чисто 2- цикловых решений надо рассмотреть уравнение

$$\varphi'_2(\omega_c) = \frac{\varphi_2(\omega_c)}{\varphi_1(\omega_c)} = 0.$$

(Здесь знак «'» не означает дифференцирования!)

После несложных выкладок находим

$$\lambda^2 \omega_c^2 - (\lambda^2 + \lambda) \omega_c + \lambda + 1 = 0$$

$$\omega_{c1} = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda}, \quad \omega_{c2} = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda}$$

$$\rho_2 = -\lambda^2 + 2\lambda + 4, \quad |\rho_2| < 1 \rightarrow 3 < \lambda < 1 + \sqrt{6} = 3,449.$$

При $\lambda=3$ видно, что 2-цикл совпадает с 1-циклом. При потере устойчивости 1-цикла возникает устойчивый 2-цикл, существующий в указанном выше диапазоне по λ . Таким образом 2-цикл возникает мягко, или через бифуркацию.

3) $m=3$. Для нахождения чисто 3-циклов следует решать уравнение

$$\varphi'_3(\omega_c) = \frac{\varphi_3(\omega_c)}{\varphi_1(\omega_c)} = 0.$$

Это уравнение приводит к нахождению корней многочлена 6-й степени

$$\begin{aligned} & \lambda^6 \omega_c^6 - (3\lambda^6 + \lambda^5) \omega_c^5 + (3\lambda^6 + 4\lambda^5 + \lambda^4) \omega_c^4 - \\ & - (\lambda^6 + 5\lambda^5 + 3\lambda^4 + \lambda^3) \omega_c^3 + (2\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2) \omega_c^2 - \\ & - (\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda) \omega_c + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

Численное исследование этого уравнения показало, что до $\lambda_{3L}=3,8284\dots$ оно не имеет корней. При $\lambda=\lambda_{3L}$ появляются 3 кратных корня, т.е. возникает 3- цикл. С ростом λ от этого 3- цикла ответвляются 2 решения (уравнение относительно λ имеет 6 корней) - один устойчивый 3-цикл, другой неустойчивый. Устойчивость 3-цикла сохраняется до $\lambda_{3p}=3,8414\dots$. При $\lambda>\lambda_{3p}$ оба 3-цикла продолжают существовать и оба неустойчивы. В отличие от 2-цикла, возникающего мягко, устойчивый 3-цикл возникает жестко, это значит, что до $\lambda=\lambda_{3L}$ не существует никакого m - цикла, переходящего непрерывным образом по λ в указанные 3-цикла.

Параметрам жесткого возникновения m -цикла соответствует кратность корней уравнения $\varphi'_m(\omega_c) = 0$. При $m=4$ уравнение (7.9)

содержит в себе корни, соответствующие 1-циклу и чисто 2-циклу. Следовательно,

$$\varphi'_4(\omega_c) = \frac{\varphi_4}{\varphi_1 \varphi'_2} = \frac{\varphi_4}{\varphi_2}.$$

Нетрудно показать, что степень многочлена $\varphi_m(\omega_c)$ будет 2^m . Это значит, что многочлен $\varphi'_4(\omega_c)$ будет иметь степень $2^4 - 2^2 = 12$. Таким образом, возможно существование трех 4-циклов. Один из них возникает в результате бифуркации от 2-цикла. Два других, по-видимому, должны соответствовать жесткому возникновению 4-циклов - одного устойчивого, другого неустойчивого. Расчеты показали, что это действительно так. Процесс формирования многочленов $\varphi'_m(\omega_c)$ можно последовательно продолжить и рассчитать чисто m -циклы, возникающие жестко и бифуркацией.

Результаты расчета сведены в таблицу 7.3, где λ_{ml} , λ_{mj} указывают диапазоны существования соответствующих устойчивых m -циклов. Последний столбец указывает величину этого диапазона. В таблице 7.3 указана лишь часть проведенных расчетов. На рис. 7.14 построена частичная картина ветвления до $m \leq 6$. Так же как и в случае двумерного отображения картина ветвления состоит из основной ветви V_{11} и ветвей V_{ji} , начинающихся с жестко возникающих i -циклов и заканчивающихся точками сгущения λ_{ij}^* каждой ветви. Максимальное значение j указывает число жестко возникающих i -циклов. С ростом i, j диапазоны по λ существования ветвей сужаются. Сопоставляя данные таблицы 7.3 и рис. 7.14 с бифуркационной диаграммой легко заметить, что окна детерминированной динамики появляются в начале ветвей V_{ij} с небольшими i, j . С ростом i ветви все более плотно заполняют диапазон $\lambda_{11}^* < \lambda < 4$.

t

<i>Ветвь</i>	<i>m</i>	λ_{ml}	λ_{mp}	$\Delta\lambda_m$
V_{11}	1	1	3	2
	2	3	3,4494	0,4494
	4	3,4494	3,5440	0,0946
	8	3,5440	3,5644	0,0203
	.	.	.	.
V_{31}	3	3,8284	3,8414	0,0130
	6	3,8414	3,8476	0,0051
	.	.	.	.
V_{41}	4	3,9601	3,9607	0,0006
	8	3,9607	3,9610	0,0003
	.	.	.	.
V_{51}	5	3,7381	3,7411	0,0029
	10	3,7411	3,7425	0,0014
	.	.	.	.
V_{52}	5	3,9055	3,9061	0,0005
	.	.	.	.
V_{61}	6	3,6265	3,6303	0,0038
	.	.	.	.
V_{62}	6	3,9375	3,9375	0,00008
	.	.	.	.

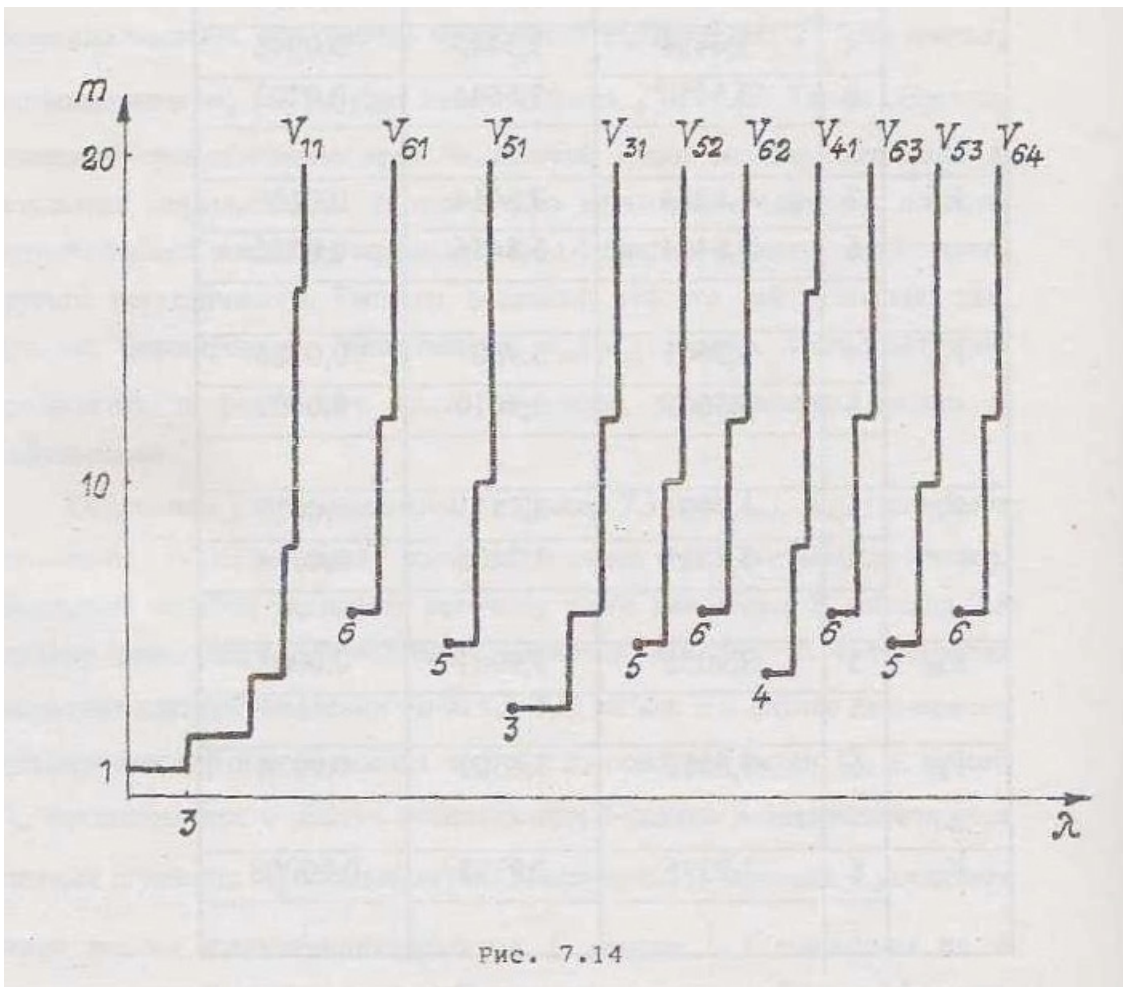


Рис. 7.14

Пересекающихся ветвей, т.е. неединственности устойчивых m -циклов, не обнаружено. Бифуркационные параметры ветви V_{II}

$$\lambda_{11}^{(1)} \approx 3; \quad \lambda_{11}^{(2)} = 3,449; \quad \lambda_{11}^{(3)} = 3,544; \quad \lambda_{11}^{(4)} = 3,564; \quad K$$

образуют сходящуюся к λ_{11}^* последовательность. Если ввести величины

$$\delta_k = \frac{\lambda_{11}^{(k+1)} - \lambda_{11}^{(k)}}{\lambda_{11}^{(k+2)} - \lambda_{11}^{(k+1)}}, \quad k = 1, 2, K$$

то оказывается, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta_* = 4,6692016K$$

Впервые это свойство отображения (7.8) заметил М. Фейгенбаум [16]. Удивительным оказалось, что это свойство присуще другим одномерным отображениям. В частности, отображению

$$\omega_k = \mu \sin(\pi \omega_{k-1}), \quad k=1, 2, \dots, \quad 0 < \mu < 1.$$

М. Фейгенбаум выделил целый класс одномерных отображений, обладающих одной и той же величиной δ_* , естественно, получившей название универсальной. Поскольку параметры α_{11}^* отвечают апериодическому, хаотичному движению, то М. Фейгенбаум сделал вывод о том, что универсальная постоянная δ_* знаменует собой переход к хаотической динамике. Развита М. Фейгенбаумом теория получила название теории универсалий.

Однако ни теория универсалий и никакие другие теории не дают ответа на главный вопрос: почему возникает хаотическая динамика. Именно на этот вопрос мы попытаемся дать ответ.

7.6 Причины возникновения хаотической динамики в отображении Фейгенбаума

Пусть задан устойчивый m -цикл ω_{ck} , $k=\overline{1,m}$ с областью притяжения D_ω . Рассмотрим возмущенное движение $\omega_k = \omega_{ck} + \varepsilon_k$ и уравнение для возмущения

$$\varepsilon_k = \lambda(1 - 2\omega_{ck-1}\varepsilon_{k-1})\varepsilon_{k-1}.$$

Проследим за эволюцией возмущения ε_k в зависимости от ε_0 :

$$\varepsilon_1 = \lambda(1 - 2\omega_{c0} - \varepsilon_0)\varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_2 = \lambda^2(1 - 2\omega_{c0} - \varepsilon_0)(1 - 2\omega_{c1} - \varepsilon_1)\varepsilon_0,$$

.....

$$\varepsilon_m = \psi(\varepsilon_0)\varepsilon_0,$$

где

$$\psi(\varepsilon_0) = \lambda \prod_{k=1}^m (1 - 2\omega_{ck-1} - \varepsilon_{k-1}).$$

Пусть ε_0 такое, что $\omega_0 = \omega_{c0} + \varepsilon_0 \in D_\omega$. Это значит, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{nm} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Но характер стремления к нулю будет зависеть от ε_0 . Заметим, что $|\psi(0)| = |\rho_m| < 1$ (см. (7.10)). Поскольку $\Psi(\varepsilon_0)$ является многочленом относительно ε_0 , то с ростом $|\varepsilon_0|$ будет неограниченно расти и $|\psi(\varepsilon_0)|$. Если $|\psi(\varepsilon_0)| < 1$, то $|\varepsilon_m| < |\varepsilon_0|$. Если же $|\psi(\varepsilon_0)| > 1$, то $|\varepsilon_m| > |\varepsilon_0|$ и величина возмущения будет нарастать. При этом возмущенное решение ω_m не выйдет из области притяжения D_ω без учета помех. Если же имеются помехи, то их действие может привести к наложению возмущений на ε_m и способствовать выходу возмущенного решения за пределы области D_ω . В этом случае сходимости возмущенного движения ω_k к ω_{ck} может не быть. Приведем теперь количественные оценки высказанным предположениям о динамике возмущенного движения.

Определение 7.1. Совокупность $\omega_0 \in D_\omega$, обеспечивающих монотонное убывание $|\varepsilon_{nm}|$ с ростом n , назовем внутренней областью притяжения D_B .

Очевидно, что $D_B \subset D_\omega$.

Рассмотрим уравнение относительно ε_0

$$f(\varepsilon_0) = |\psi(\varepsilon_0)| - 1 = 0.$$

Поскольку $f(0) = |\rho_m| - 1 < 0$ и $\lim_{|\varepsilon| \rightarrow \infty} f(\varepsilon_0) = \infty$, то это уравнение имеет корни. Так как ε_0 может быть привязано к любому из ω_{ck} , $k = \overline{1, m}$, то для каждого k это уравнение будет иметь корни. Наименьший по модулю из корней уравнения $f(\varepsilon_0) = 0$ для каждого k обозначим r_{Bk} .

Определение 7.2. Величину $r_B = \min r_{Bk}$ назовем радиусом внутренней области притяжения D_B .

Рассмотрим теперь динамику отображения (7.8) в условиях помех. Но прежде чем переходить непосредственно к экспериментам, рассмотрим какие варианты динамики возможны в зависимости от соотношения r_B и величены помехи δ .

1) $\delta < r_B$; поскольку возмущения при этом будут монотонно гаснуть следует ожидать детерминированную динамику (вернее, динамику в малой окрестности m -цикла).

2) Должно существовать такое $r^* > r_B$, что при $\delta > r^*$ возмущенное движение будет выходить из области притяжения m -цикла и, следовательно, следует ожидать хаотическую динамику.

3) При $r_B < \delta < r^*$ возможно чередование хаотической и детерминированной динамики.

Для проведения экспериментов был выбран 19-цикл (см. табл. 7.4), радиус внутренней области притяжения которого оказался $r_B = 0,26047 \times 10^{-8}$. Возмущенное движение рассчитывалось с помощью отображения

$$\omega_k = \lambda \omega_{k-1} (1 - \omega_{k-1}) + \delta \gamma_k.$$

Слагаемое $\delta \gamma_k$ играет здесь роль помехи. Величины γ_k выбирались случайным образом по закону равномерного распределения из диапазона $(-1,1)$.

Вообще говоря, помеха $\delta \gamma_k$ и возмущение ε_k различны. Но вблизи m -цикла можно принять $\varepsilon_k = \gamma \delta_k$ и, таким образом γ играет роль величины помехи. Численные эксперименты проводились в соответствии с алгоритмом рис. 7.13,б и отражены на рис. 7.15. Детерминированная динамика здесь соответствует тем значениям n , которым отвечают четко различимые горизонтальные линии, соответствующие 19-циклу. Для $\delta = 0,25 \times 10^{-8}$ имеет место детерминированная динамика, для $\delta = 10^{-8}$ - хаотическая, а для $\delta = 0,38 \times 10^{-8}$ - перемежаемость детерминированной и хаотической динамики по помехе. В общем случае $r_B = r_B(m(\lambda))$. Для одного и того же m -цикла, существующего в диапазоне $\lambda_{ml} < \lambda < \lambda_{mr}$, имеется наибольшее r_B , которое обозначим r_{Bmax} . Как показали расчеты, при фиксированном m , r_{Bmax} мало зависит от λ , но с ростом m , r_{Bmax} быстро убывает. Так, для одного из 33-цикла было рассчитано $r_{Bmax} \sim 10^{-15}$. Это значит, что рассчитать m -цикла на ЭВМ с 16-разрядным десятичным представлением чисел невозможно при $m \leq 33$.

Таблица 7.4

 $m=19, \lambda=3,682167823181575657$

k	ω_{ck}
0	0,5
1	0,92054
2	0,26933
3	0,72461
4	0,73476
5	0,71760
6	0,74618
7	0,69737
8	0,77709
9	0,63782
10	0,85059
11	0,46792
12	0,91675
13	0,28100
14	0,74395
15	0,70140
16	0,77117
17	0,64976
18	0,83795

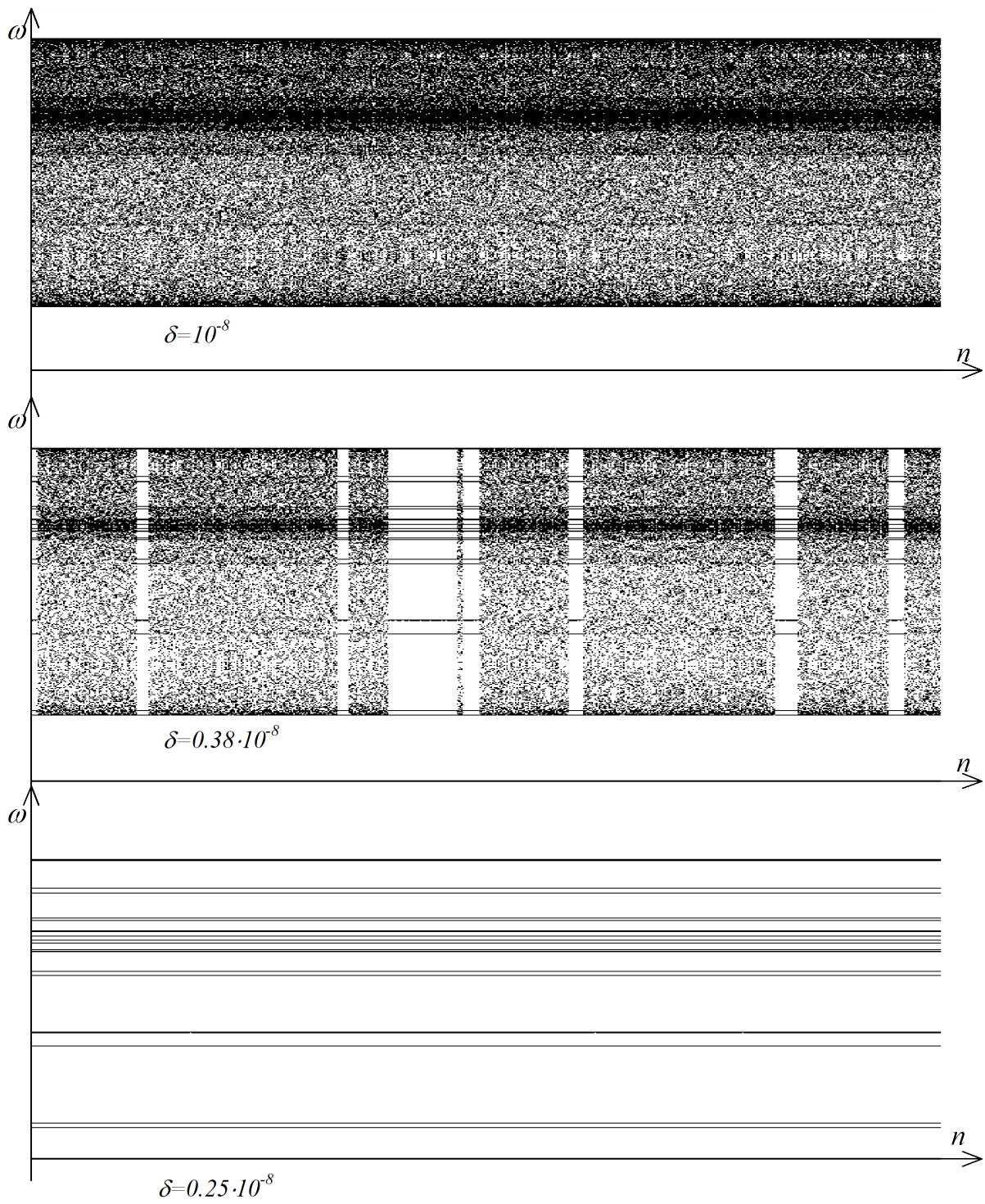


Рис. 7.15.

7.7. К динамике стабилизатора

Можно ввести понятие внутренней области притяжения D_B и ее радиуса r_B для динамических систем (2.1) или многомерных отображений. Но это сложное занятие. Еще сложнее рассчитать r_B . С другой стороны, на основании анализа отображения Фейгенбаума можно сделать предположение о том, что с ростом m происходит сужение области D_B и, по этой причине, при достаточно больших m , может возникнуть хаотическая динамика. Это предположение подтверждается на модели стабилизатора построением бифуркационной диаграммы для двумерного отображения (7.4), (7.5). Такая бифуркационная диаграмма изображена на рис. 7.16 в диапазоне $50 < \alpha < 70,5$. Алгоритм получения этой диаграммы тот же, что и на рис. 7.13 а, с определенными коррективами: цикл по λ заменен циклом по α , в качестве начального условия выбирается $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$, вместо одномерного отображения Фейгенбаума подразумевается отображение (7.4), (7.5) и выводится на печать только ω_{2k} .

В диапазоне $50 < \alpha < 52,67$ устанавливается 1-цикл. Это естественно, поскольку никаких других периодических движений в указанной области изменения α не существует. В диапазоне $52,67 < \alpha < 55,9$ кроме устойчивого 1-цикла существует и устойчивый 3-цикл. Однако здесь тоже устанавливается только 1-цикл. Это объяснение тем, что выбранное начальное условие находится в области притяжения 1-цикла. Дальнейшее увеличение коэффициента усиления приводит динамику отображения в устойчивый 3-цикл, что связано с попаданием выбранных начальных условий в область притяжения 3-цикла. В окрестности бифуркационного параметра $\alpha \approx 61,5$, соответствующего потере устойчивости 3-цикла и возникновению устойчивого 6-цикла, хорошо просматривается «размытость» линий бифуркационной диаграммы. Эту «размытость» можно объяснить малостью радиусов внутренней области притяжения 3-цикла и 6-цикла в окрестности бифуркационного параметра, что приводит

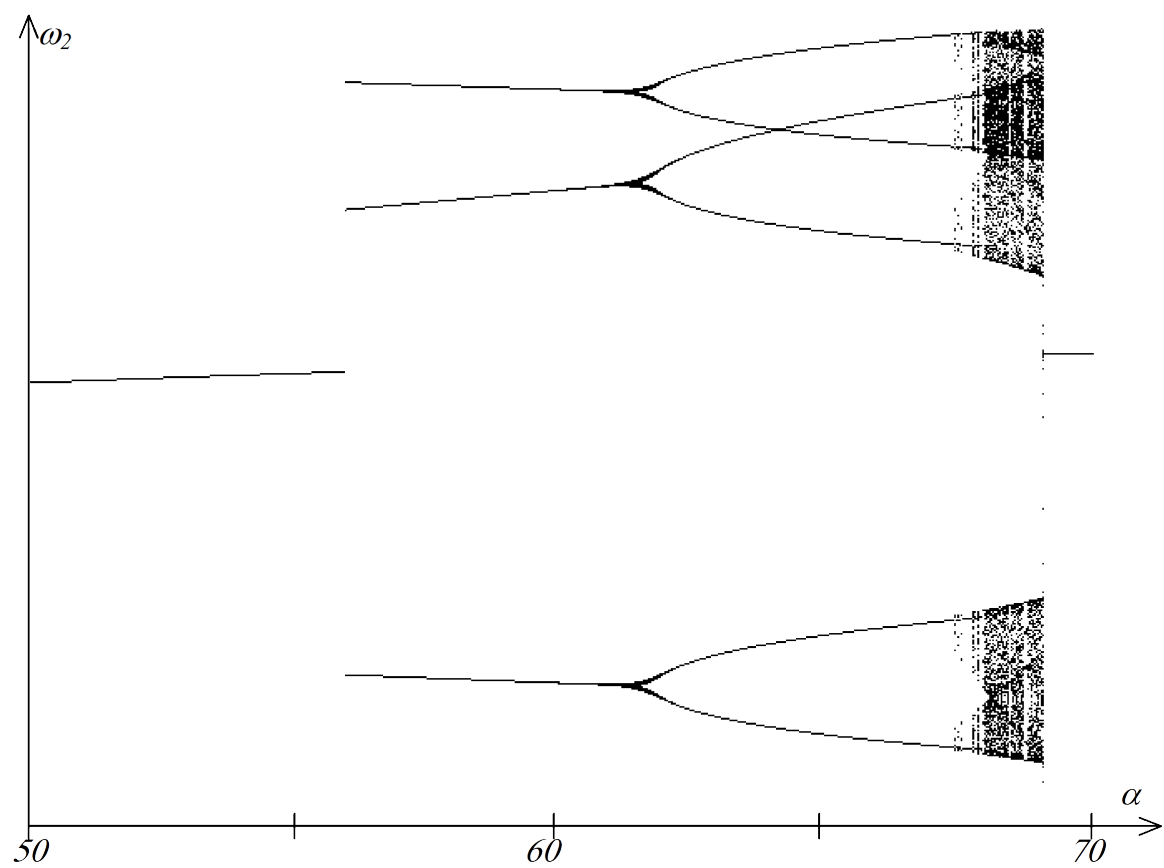


Рис. 7.16.

к немонотонному поведению величины помехи, являющейся следствием усечения чисел в ЭВМ. Появление хаотической динамики в диапазоне $68 < \alpha \leq 69,5$ объясняется попаданием выбранных начальных условий в область притяжения многоциклового периодического движения с малым радиусом внутренней области притяжения. При $\alpha \geq 70$ все устойчивые периодические движения, кроме 1-цикла, исчезают.

Наличие детерминированной (в виде 1-цикла) и хаотической динамики в области $68 < \alpha \leq 69,5$ наводит на мысль о возможности чередования двух крайних типов движений в условиях случайных помех. С целью подтверждения указанной мысли проведен численный эксперимент при $\alpha = 68,5$. Алгоритм этого эксперимента отражен в виде блок-схемы рис.7.17. Цикл по i соответствовал моментам возникновения случайной помехи, что выражалось в случайном выборе начальных условий $W_0 = (\omega_{10}, \omega_{20})$. Назначение цикла по j - исключение переходного процесса. При этом под $W = F(W)$ подразумевается счет отображения (7.4), (7.5). Цикл по k соответствует движению по временной оси. Причем для каждого k в цикле по l считалось отображением и выводилось на печать ω_{2l} . В проводимом эксперименте выбиралось $N_U = 200$, $N_p = 100$. Реализация рассмотренного алгоритма отражена на рис.7.18. Вертикальные линии на горизонтальной оси соответствуют моментам возникновения импульсной помехи. Как и предполагалось, реализуется либо детерминированное, либо хаотическое движение в зависимости от попадания в их область притяжения случайным образом выбираемого начального условия.

Анализ отображения Фейгенбаума и результаты численного эксперимента, представленные на рис. 7.18, позволяют сделать вывод о причинах возникновения хаотической динамики, отличных от указанных в п.7.4. При этом возможны следующие варианты, возникающие при фиксированных параметрах.

1) Пусть существует единственное устойчивое стационарное движение с радиусом внутренней области притяжения r_B . Хаотическая динамика возникает, если величина помехи будет превосходить r_B .

2) Пусть существует несколько устойчивых стационарных движений с различными радиусами областей притяжения r и радиусами внутренних областей притяжения r_B . В зависимости от соотношения величины r и r_B возможна катастрофическая хаотизация динамической системы.

Под катастрофой понимается резкая смена характера движения в течение короткого, по отношению к длительности функционирования устройства, временного интервала. Именно этот вариант иллюстрирует рис. 7.18.

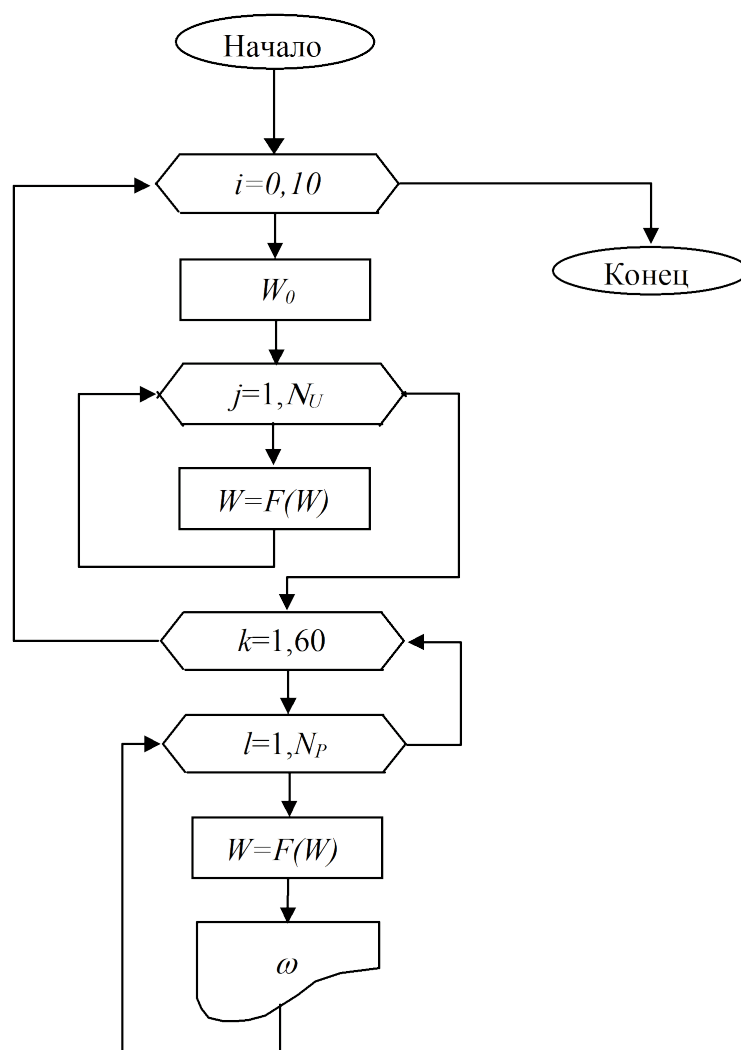


Рис. 7.17.

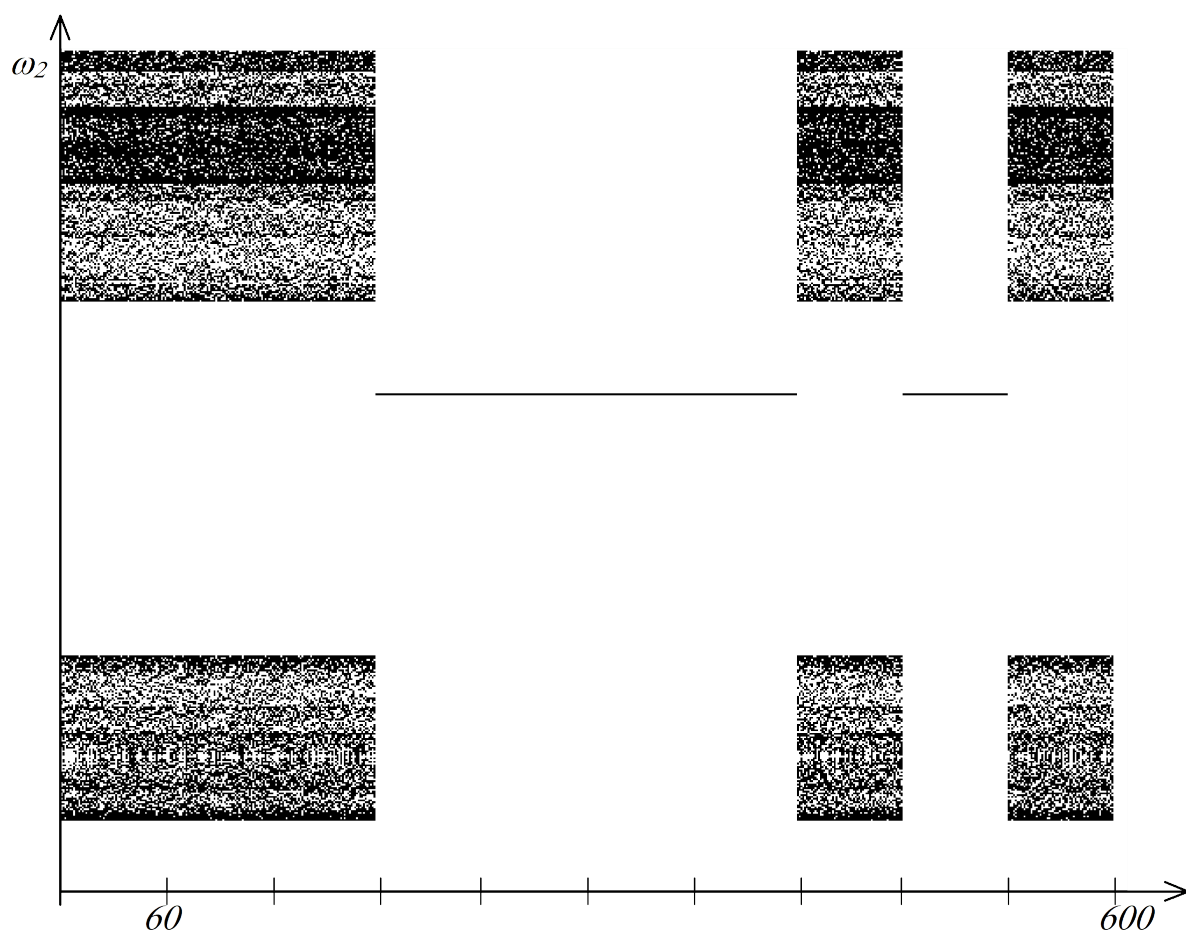


Рис. 7.18.

7.8. Понятие нормальных и аномальных структур

Проведенные исследования динамики отображений (7.4), (7.5) и (7.8) позволяют провести интересные обобщения, приводящие к новым понятиям.

Пусть задан некоторый объект со структурой S . Пусть на этой структуре определена динамическая система с параметрами Π , образующими подпространство евклидова пространства E_n , где n - число варьируемых параметров. Точки этого пространства обозначим P . Пусть $\Pi_{mj} \subset \Pi$ - области параметров, обладающие следующими свойствами.

- 1) Π_{mj} - односвязные множества.
- 2) Для любых $P \in \Pi_{mj}$ существует локально устойчивое (не обязательно асимптотически) стационарное движение.
- 3) Имеет место непрерывность стационарных движений по параметрам, то есть для любых $P', P'' \in \Pi_{mj}$ движения будут сколь угодно мало отличаться при сколь угодно малой близости P', P'' .
- 4) Граничные точки областей Π_{mj} могут быть следующих типов:
 - а) простые, то есть для них существует устойчивый m -цикл; эти точки возникают из-за возможной ограниченности множества Π ;
 - б) жесткие, отвечающие жесткому возникновению m -циклов;
 - в) точки сгущения, соответствующие апериодическим движениям;
 - г) точки мягкого возникновения m -циклов, то есть точки бифуркаций.
- 5) m -цикл для Π_{mj} является минимальным. То есть нет i -циклов с $i < m$. Индекс $j=1, 2, \dots$ введен для различения областей, имеющих одно и то же m .

Пример 7.1. Для стабилизатора $n=1$, поскольку варьировался лишь один параметр $\alpha, \Pi = \{\alpha > 0\}$.

$$\Pi_{11} = \{0 < \alpha < \alpha_{11}^*\}, \Pi_{31} = \{52,67 < \alpha < \alpha_{31}^*\}, \Pi_{51} = \{144,6 < \alpha < \alpha_{51}^*\}.$$

Пример 7.2. Для отображений Фейгенбаума $n=1$, $\Pi=\{1<\lambda<4\}$.

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \{1 < \lambda < \lambda_{11}^*\}, \Pi_{31} = \{3,828 < \lambda < \lambda_{31}^*\}, \\ \Pi_{51} &= \{3,7381 < \lambda < \lambda_{51}^*\}, \Pi_{52} = \{3,9055 < \lambda < \lambda_{52}^*\}, \text{К} \end{aligned}$$

Возникает вопрос- будет ли иметь место равенство:

$$\Pi / \bigcup_{m,j} \Pi_{mj} = 0? \quad (7.11)$$

Если это так, то для любых $P \in \Pi$ существуют либо устойчивые m -циклы, либо апериодические движения, которые принимают хаотический характер в силу сужения внутренней области притяжения. Если же (7.11) не выполняется, то существуют параметры, при которых возможны еще какие-то движения.

Одну из областей Π_{mj} назовем основной и обозначим $\Pi_{осн}$. Выбор $\Pi_{осн}$ определяется проектировщиком из соображений обеспечения динамики объекта, соответствующей техническому заданию. В частности, для стабилизатора $\Pi_{осн} = \Pi_{11}$. Это объясняется тем, что для Π_{11} минимальным является 1-цикл, который, по-видимому, обеспечит наименьшие пульсации выходного напряжения.

Определение 7.3. Структура S нормальна, если

$$1) \Pi_{осн} \cap \bigcup_{m,j} (\Pi_{mj} / \Pi_{осн}) = 0,$$

$$2) \Pi_{осн} \cap \left(\Pi / \bigcup_{m,j} \Pi_{mj} \right) = 0$$

В противном случае структура аномальна. Поясним смысл этого определения. Во-первых, относительно второго пункта: по существу он является дополнением первого, если не выполнено условие (7.11). Если же (7.11) выполнено, то этот пункт автоматически исчезает. Что касается 1-го пункта, то он означает, что для любых $P \in \Pi_{осн}$ существует единственное

устойчивое движение и, следовательно, это движение глобально устойчиво.

Пример 7.3. Если $\Pi_{II} = \Pi_{осн}$ как в случае стабилизатора, так и в случае отображения Фейгенбаума, то структура стабилизатора аномальна, поскольку

$$P_{11} \wedge P_{31} \neq 0, P_{11} \wedge P_{91} \neq 0, K$$

а структура объекта, динамика которого определяется отображением (7.8) - нормальна.

В чем же главное отличие нормальных структур от аномальных? Пусть спроектированный объект функционирует в условиях случайных помех, а параметры его имеют тенденцию к вариации. Вариация параметров может быть обратимой, связанной, например, с отклонением внешних условий эксплуатации объекта от оптимальных. Но может быть и необратимой, вызванной старением элементов структуры. В объектах с нормальной структурой непрерывное отклонение параметров от оптимальных приведет к непрерывному, постепенному изменению его динамических характеристик. Если структура аномальна, то смена параметров может привести к катастрофической хаотизации, следствием чего станет возможным саморазрушение объекта. Очевидно, что степень аномальности может быть различной. Это связано со степенью различия характеристик разных стационарных движений, существующих при одних и тех же параметрах.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для понимания того, что дает автоматизация проектирования, надо сопоставить действия разработчика в условиях отсутствия ЭВМ и пакета программ автоматизированного проектирования, и при наличии таковых. В первом случае проектирование начинается с выбора определенной структуры объекта. Затем производится изучение ее функциональных свойств (динамики) в зависимости от параметров. Это осуществляется на основе упрощенных инженерных методик и интуиции. Наступает момент, когда приходится принимать ответственное решение - дать задание на проведение конструкторских работ и изготовление опытного образца. Каждое такое решение содержит в себе долю риска. Далеко не всегда динамические свойства изготовленного устройства будут соответствовать требованиям технического задания. Если такое происходит, то весь трудоемкий процесс проектирования и изготовления устройства надо повторять. Во втором случае кажется, что разработчик находится в более выгодном положении. Он имеет возможность быстро изменить структуру на экране дисплея, быстро менять параметры и даже автоматизировать их выбор с целью обеспечения наилучшей динамики. Однако гарантии качества спроектированного объекта может не быть. Поясним эту мысль на примере рассмотренного в п. 7 стабилизатора. Предположим, что автоматизированное проектирование дало коэффициент усиления $\alpha=70$. Однако по причине возможных вариаций параметров в процессе эксплуатации не исключена ситуация, когда коэффициент усиления уменьшится. При наличии случайных помех возникает возможность выхода на хаотическую динамику. Как было выяснено, это является следствием аномальной структуры стабилизатора. Отсюда становится совершенно ясной важность проблемы различения нормальных и аномальных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1973. - 848 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, 1974. - 432 с.
3. Волков И.В., Шлапак В.А. Машинные методы расчета систем стабилизированного тока. Киев: Наукова думка, 1978. - 152 с.
4. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. - М.: Сов. Радио, 1976. - 608 с.
5. Моделирование и оптимизация на ЭВМ радиоэлектронных устройств / З.М. Бененсон, М.Р. Елистратов, Л.К. Ильин и др.; Под ред. З.М. Бененсона. -М.: Радио и связь, 1981. - 272 с.
6. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. -М.: Радио и связь, 1988. - 560 с.
7. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов по спец. «Автоматизированные системы управления». -М.: Высш. Шк., 1985. - 271 с.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука, 1987. - 600 с.
9. Беркович Е.И. Устойчивость в целом замкнутой системы регулирования с широтно-импульсным преобразователем. // Электричество, 1985, №7.
10. Беркович Е.И. Устойчивость замкнутой системы автоматического регулирования однофазного инвертора с самовозбуждением. //Электричество, 1990, №2.
11. Зубов В.И. Теория уравнений управляемого движения. - Изд-во Ленинградского университета, 1980, - 286 с.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1974.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы -М.: Наука, 1989. - 432 с.
14. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество, 1992, №8.
15. Алейников О.А., Баушев В.С., Кобзев А.В., Михальченко Г.Я. Исследование локальной устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных системах //Электричество, 1991, №4.
16. Фейгенбаум М. Универсальное поведение в нелинейных системах //Успехи физических наук, 1983, т. 141, вып. 2.