

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)  
Кафедра промышленной электроники (ПрЭ)

**Михальченко С. Г.**

**Информационные технологии.**

**Часть 2.**

**Профессиональные  
математические пакеты**

**Учебно-методическое пособие по  
проведению практических работ**



**ТОМСК 2017**



## Михальченко С.Г.

Информационные технологии. Часть 2. Профессиональные математические пакеты. Учебно-методическое пособие по проведению практических работ / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2017. – 86 с. : ил., табл., прил. – Библиогр.: с. 72.

Настоящее учебно-методическое пособие имеет целью получение профессиональных компетенций в области информационных технологий, курс базируется на изучении программного пакета *MathCAD* и применении полученных знаний в различных видах деятельности (инженерной, научно–исследовательской, управленческой, и др.).

Настоящее учебное пособие может применяться для обучения студентов по дисциплинам «*Профессиональные математические пакеты*», «*Инженерные расчеты в MathCAD*» и «*Линейная алгебра и аналитическая геометрия*».

Учебно-методическое пособие может быть использовано для проведения практических занятий как аудиторно, так и в режиме самоподготовки.

Учебно-методическое пособие рекомендовано для организации самостоятельной работы студентов.

Наличие вариантов индивидуальных заданий позволяет использовать настоящее пособие для проведения контрольных работ и итогового тестирования.

© Михальченко С.Г., 2017

© Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СОДЕРЖАНИЕ</b> .....	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>5</b>
<b>1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС МАТНСАД</b> .....	<b>6</b>
1.1. ИНТЕРФЕЙС МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА МАТНСАД .....	6
1.2. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПАНЕЛИ И ШАБЛОНЫ .....	7
1.3. ОПЕРАТОРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ И ИНДИКАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ .....	9
<b>2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТНСАД</b> .....	<b>13</b>
2.1. ТАБЛИЧНЫЙ И ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОИСКА КОРНЕЙ.....	13
2.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОИСКА КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ .....	14
2.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МАТНСАД .....	15
<b>3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ</b> .....	<b>17</b>
3.1. ВЫВОД ГРАФИКОВ В МАТНСАД.....	17
3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ПАКЕТА МАТНСАД.....	18
3.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ....	25
<b>4. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ МАТНСАД</b> .....	<b>27</b>
<b>5. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ МАТНСАД</b> .....	<b>31</b>
5.1. МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ МАТНСАД.....	31
5.2. МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ .....	36
5.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.....	37
<b>6. ВЕКТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ</b> .....	<b>39</b>
6.1. ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ.....	39
6.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ (НЕЗАВИСИМОСТЬ) ВЕКТОРОВ.....	40
6.3. СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР И СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ .....	41
6.4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ .....	42
<b>7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ</b> .....	<b>44</b>
7.1. МЕТОД ГАУССА .....	44
7.2. ПРАВИЛО КРАМЕРА .....	45
7.3. СЛАУ ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ.....	46
7.4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	47
<b>8. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ</b> .....	<b>49</b>
8.1. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. КРАТКИЙ ОБЗОР. ....	49
8.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА .....	49
8.3. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.....	51
8.4. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ .....	51
8.5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО .....	54
8.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ .....	54
<b>9. СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ</b> .....	<b>56</b>
9.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ .....	57
9.2. УПРОЩЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ.....	58
9.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СТЕПЕНЯМ.....	58
9.4. ЗАДАЧА РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЫЕ ДРОБИ .....	60
9.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7. СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МАТНСАД.....	62
<b>10. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ</b> .....	<b>63</b>
10.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.....	63
10.2. РЕГРЕССИЯ.....	66
10.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ .....	70
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>71</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>72</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Вычислительная**, или, как еще говорят, **компьютерная математика** либо **компьютерная алгебра**, – это большой раздел математического моделирования. В принципе, программы такого рода можно отнести к *инженерным программам автоматизированного проектирования*. Таким образом, в области инженерного проектирования выделяют три основных раздела:

- CAD — Computer Aided Design (проектирование);
- CAM — Computer Aided Manufacturing (производство);
- CAE — Computer Aided Engineering (инженерные расчеты).

Сегодня серьезное конструирование, градостроительство и архитектура, электротехника и масса смежных с ними отраслей, а также учебные заведения технической направленности уже не могут обойтись без *CAD\CAM\CAE* – систем (систем автоматизированного проектирования – *САПР*), производства и расчетов. А математические пакеты являются составной частью мира *CAE*-систем, но эта часть никак не может считаться второстепенной, поскольку некоторые задачи вообще невозможно решить без помощи компьютера. Более того, к системам вычислительной математики сегодня прибегают даже математики-теоретики, например для проверки своих гипотез.

В настоящее время в *математических пакетах* применяется **принцип конструирования модели**, а не традиционное искусство программирования. То есть пользователь лишь ставит задачу, а методы и алгоритмы решения система находит сама. Такие рутинные операции, как раскрытие скобок, преобразование выражений, нахождение корней уравнений, производных и неопределенных интегралов компьютер самостоятельно осуществляет в символьном виде, причем практически без вмешательства пользователя.

Современные математические пакеты можно использовать и как обычный калькулятор, и как средства для упрощения выражений при решении каких-либо прикладных задач.

В настоящее время практически все современные *CAE*-программы имеют встроенные функции *символьных вычислений*. Однако наиболее известными и приспособленными для математических символьных вычислений считаются *Mathematica* [1], *Maple* [2], *MatLab* [3], и *MathCAD* [4].

## 1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MATHCAD

В отличие от мощных и ориентированных на высокоэффективные вычисления программных пакетов, описанных выше, программа *MathCAD* – это, скорее, простой, но продвинутый редактор математических текстов с широкими возможностями символьных вычислений и прекрасным интерфейсом.

*MathCAD* [4] был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании *Mathsoft* [<http://www.mathsoft.com/>], которая с 2006 г. является частью корпорации PTC [<http://communities.ptc.com>] (*Parametric Technology Corporation*).

*MathCAD* не имеет языка программирования как такового, а ядро символьных вычислений заимствовано из пакета *Maple*. Некоторые из математических возможностей *MathCAD* (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры *Maple* (МКМ, *Maple Kernel Mathsoft*). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро *MuPAD*.

Зато интерфейс программы *MathCAD* очень простой, а возможности визуализации богатые. Все вычисления здесь осуществляются на уровне визуальной записи выражений в общеупотребительной математической форме. Пакет имеет хорошие подсказки, подробную документацию, функцию обучения использованию, целый ряд дополнительных модулей и приличную техническую поддержку производителя. Однако пока математические возможности *MathCAD* в области компьютерной алгебры намного уступают системам *Maple*, *Mathematica*, *MatLab*. Однако по программе *MathCAD* выпущено много книг и обучающих курсов, в том числе у нас в России. Сегодня эта система стала буквально международным стандартом для прикладных технических вычислений.

### 1.1. Интерфейс математического процессора MathCAD

Программный комплекс *MathCAD* (*Mathematical Computer Aided Design* – математическое автоматизированное проектирование) предназначен для автоматизации решений широкого круга задач, связанных с математическими расчетами. Это многофункциональная вычислительная среда, снабженная дружелюбным, во многом интуитивно понятным графическим интерфейсом.

*MathCAD* имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов.

При запуске *MathCAD* на экране появляется окно интерфейса (Рис. 1).

Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип WYSIWYG (*What You See Is What You Get* – что видишь, то и получаешь).

#### **Рабочий лист и регионы**

В поле основного окна отображается продолжаемый вправо и вниз бесконечный рабочий лист (*worksheet*). На рабочем листе в произвольном порядке располагаются **регионы**. Существует три типа регионов:

- математические,
- графические,
- текстовые.

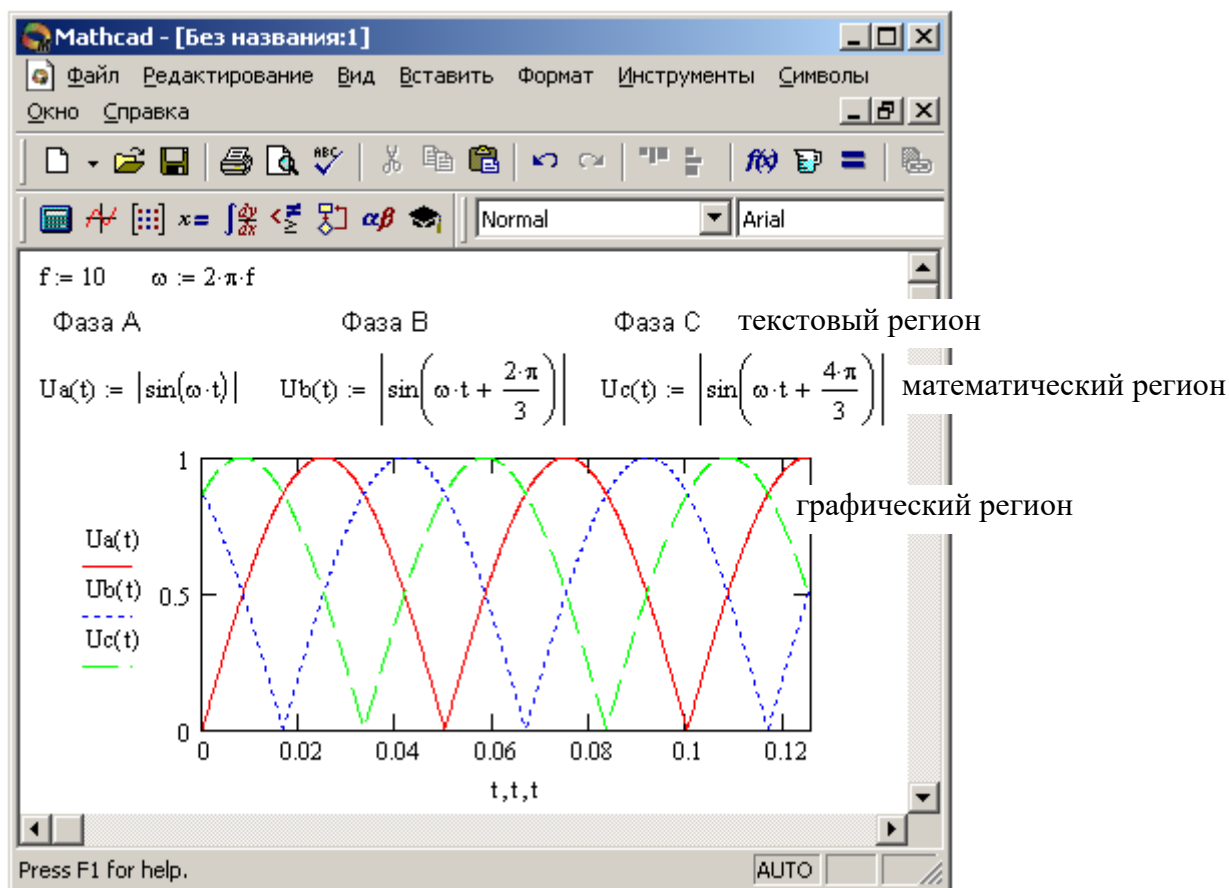


Рис. 1 – Окно интерфейса MathCAD с загруженным документом

**Математические регионы** содержат формульные выражения, операторы назначения и индикации результатов. С математическими регионами связаны вычислительные модули – участки исполняемого кода. Преобразование входной информации, занесенной в математический регион, в реализуемый код выполняется **интерпретатором MathCAD**. В отличие от компиляторов, выполняющих просмотр текста программы целиком, интерпретатор обрабатывает каждый регион в отдельности, что, собственно, и дает возможность использовать *MathCAD* как мощный калькулятор для разовых вычислений. Последовательность обработки математических регионов – *слева направо и сверху вниз* по рабочему листу. К моменту выполнения математического региона все объекты, участвующие в его выражениях, должны быть определены либо непосредственно в этом регионе, либо в предшествующих по времени выполнения регионах. Для удобства ввода информации в математические регионы в *MathCAD* широко используется система шаблонов.


**Текстовые регионы** содержат комментирующий текст и служат для оформления рабочего листа как удобочитаемого документа. Поскольку никакой исполнительный код с текстовыми регионами не связывается, их расположение на рабочем листе ничем не регламентировано. В текстовые регионы можно помещать изображения.

**Графические регионы** предназначены для вывода информации в виде графиков и изображений. Для программирования графического региона также применяются шаблоны.

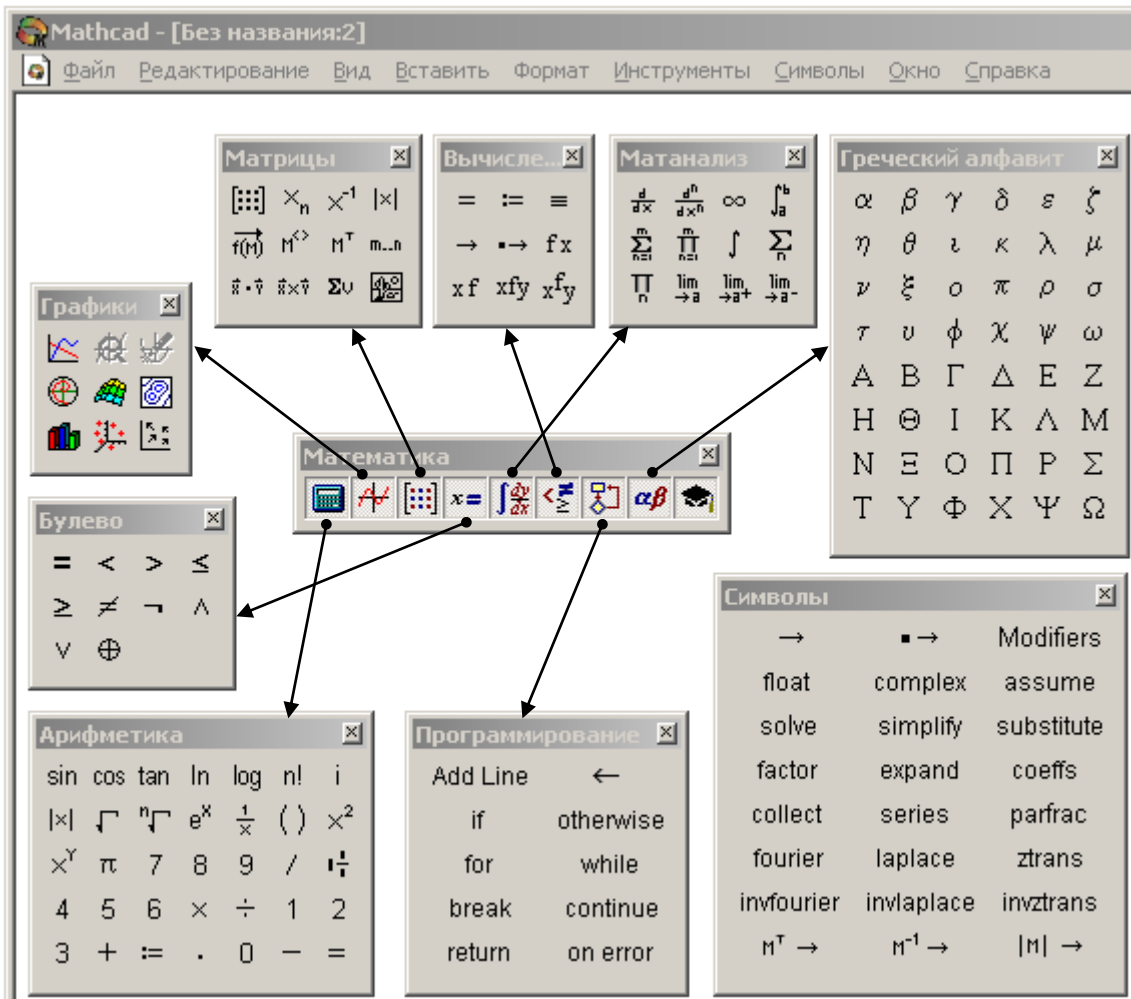
## 1.2. Инструментальные панели и шаблоны

Интерфейс *MathCAD* предоставляет пользователю представительный набор шаблонов для программирования математических и графических регионов. Для вызова шаблонов и занесения специфических символов операций используются

инструментальные панели с виртуальными кнопками или «горячие» клавиши – акселераторы.

Панели инструментов объединены в 9 тематических групп (палитр). Каждая группа может быть вызвана на экран из линейки вызова  палитр: – она же панель «Математика».

Соответствие кнопок линейки вызываемым панелям показано на *Рис. 2*.



*Рис. 2 – Панели инструментов и линейка их вызова*

Всего на инструментальных панелях представлено 169 позиций, воздействие на которые вызывает вставку определенного шаблона или символа в точку расположения курсора на рабочем листе. Как видно из *Рис. 2*, некоторые позиции дублируются, присутствуя на разных панелях, некоторые предназначены для вставки обычных символов, имеющих на клавиатуре, так что более удобно вводить непосредственным набором с клавиатуры, нежели через панель инструментов. Назначение ряда инструментов очевидно из соответствующих пиктограмм и не требует пояснений.

Здесь мы рассмотрим лишь те инструменты, применение которых необходимо для выполнения заданий лабораторных работ, информацию обо всех инструментах можно получить, воспользовавшись справочной системой *MathCAD*, вызываемой нажатием кнопки  $\langle F1 \rangle$  или из основного меню.

В составе пакета *MathCAD* имеется достаточно обширный набор встроенных функций. Вставка встроенных функций на рабочий лист может быть выполнена двумя путями:

- набором имени функции на клавиатуре – «горячих клавиш»;
- выбором функции из списка в окне диалога, открывающегося после воздействия на элемент управления с пиктограммой:





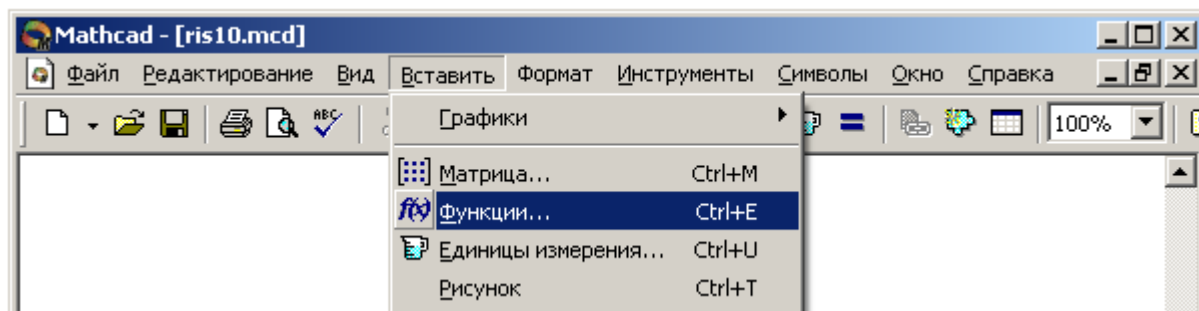


Рис. 3 – Панель вызова набора встроенных функций

Второй вариант представляется более удобным, так как на рабочий лист помещается шаблон функции с правильным названием и шаблоном списка параметров. Кроме того, в открывающемся окне диалога выбора функции имеется кнопка вызова контекстно-зависимой справки (<Ctrl-F1>).

Таблица 1 – Инструменты и клавиши быстрого вызова

Описание операции	Пиктограмма	Клавиши	Панель
Извлечение квадратного корня	$\sqrt{\quad}$	\	Calculator
Возведение в степень	$x^y$	Shift+6	Calculator
Ввод матрицы или вектора	$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$	Ctrl+M	Matrix
Ввод индекса (в элементах массива)	$x_n$	[	Matrix
Определитель, модуль, абсолютное значение	$ x $		Matrix
Выделение столбца матрицы	$M^{\diamond}$	Ctrl+6	Matrix
Создание ранжированной переменной	$m..n$	;	Matrix
Векторизация функции	$\vec{f}(M)$	Ctrl+ –	Matrix
Оператор назначения – присваивания	$:=$	:	Evaluation
Оператор глобального назначения	$\equiv$	~	Evaluation
Индикация значения в символьной форме	$\rightarrow$	Ctrl+.	Evaluation
График в прямоугольных координатах	$\sphericalangle$	Shift+2	Graph

### 1.3. Операторы определения объектов и индикации значений

**Операторы определения** (присваивания, назначения) объектов размещаются в математических регионах и выполняют три функции:

- создают объект, связывая с ним его имя – идентификатор;
- определяют тип объекта;
- инициализируют (задают) объект значением.

В качестве определяемого объекта могут выступать *переменные и функции*. **Листинг 1** демонстрирует примеры применения операторов определения объектов различного типа: вещественного числа  $a$ , векторов  $b$  и  $c$ , матрицы  $A$  и функции  $z(x)$ .

**Тип объекта**, соответствующего тому или иному имени-идентификатору, определяется типом правой части. Далее любые операции с объектом интерпретируются в соответствии с его определенным типом.

В примере (**Листинг 1**) определена функция  $z(x)$ , которая получает в качестве аргумента комплексное число  $x$  и возвращает в качестве значения комплексно-сопряженное число. Функция, задаваемая подобным образом, называется *функцией*,

определяемой пользователем. В скобках после имени функции находится список формальных параметров. В рассмотренном примере этот список состоит из единственной переменной  $x$ . При вызове – применении этой функции формальные параметры заменяются фактическими. До вызова функции, переменные, перечисленные в списке формальных параметров, будут оставаться неопределенными.

Листинг 1. Операторы определения и индикации

```

a := 17   b := (1 2 3)
a = 17   b = (1 2 3)
z(x) := Re(x) + i · Im(x)   z(x) → x

```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$$

$$z(3 - i) = 3 - i$$

Тип объекта, возвращаемого функцией, т.е. связанного с ее именем, определяется по контексту определения точно так же, как это происходит при определении переменной. Например,  $\sin(x)$  возвращает вещественное число, а  $|x|$  – целое число.

В составе определения функции могут присутствовать переменные, не передаваемые через список формальных параметров. В этом случае такие переменные должны быть определены до оператора назначения функции. Необходимо отметить, что передача параметров через глобальные переменные в общем случае нежелательна, т.к. нарушает изолированность функции и может служить источником трудно обнаруживаемых ошибок.

Виды операторов определения MathCAD

Операторы назначения в MathCAD имеют три разновидности:

- := оператор назначения (стандартный);
- ≡ оператор глобального назначения;
- ← оператор локального назначения в блоке.

Все три разновидности операторов, помимо операции присваивания значения правого операнда левому, выполняют передачу типа левому операнду.

Оператор := связывает значение и тип объекта с его идентификатором во всех регионах, выполняемых после региона, содержащего этот оператор.

Оператор ≡ действует на все регионы рабочего листа независимо от их расположения относительно региона, содержащего этот оператор.

$a = 3 + 4i$  переменная  $a$  определена глобальным назначением ниже  
 $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  переменная  $a$  переопределена назначением :=  
 $a \leftarrow 123.45 = 120.45$   
 $a \leftarrow a - 3$   
 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  переменная  $a$  переопределена назначением ←  
 назначение оператора ← распространяется только на этот блок  
 $a \equiv 3 + 4i$  переменная  $a$  определена глобальным назначением ≡  
 $a = 3 + 4i$

Рис. 4 – Области действия (видимости) операторов назначения

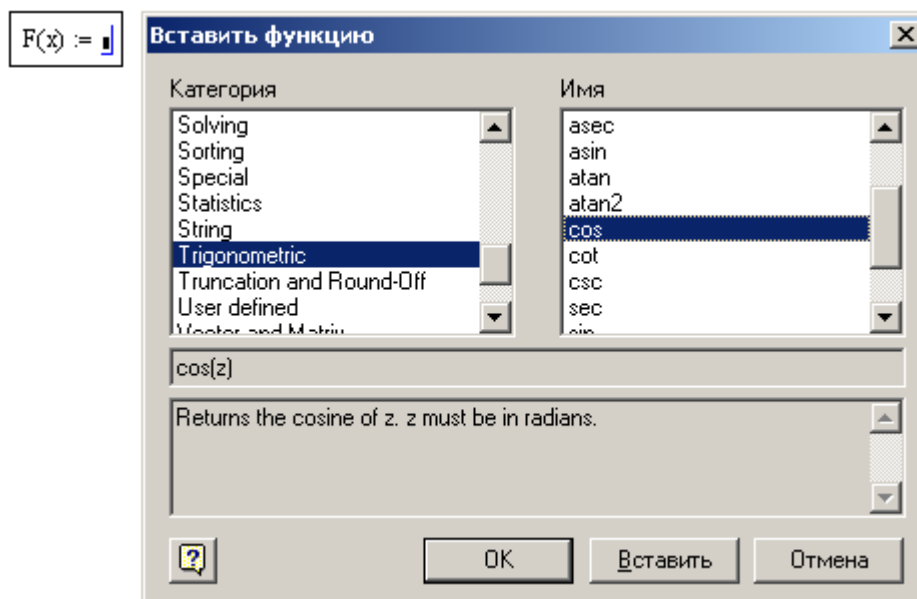
Оператор  $\leftarrow$  предназначен для использования в изолированных блоках, формируемых при программировании в пределах одного региона. Действие этого оператора распространяется только на тот регион, в котором он расположен. На *Рис. 4* показан пример переопределения типа и значения объекта *a*.

Действие оператора глобального назначения  $\equiv$  распространяется на все пространство рабочего листа. Появление в регионе оператора назначения  $:=$  вызывает переопределение типа объекта, сохраняющееся до появления следующего оператора назначения, которым может быть либо еще один оператор  $:=$ , либо (как в примере) оператор глобального назначения  $\equiv$ .

Оператор локального назначения  $\leftarrow$  не оказывает никакого действия на тип и значение объекта *a* за пределами блока, выделенного слева жирной вертикальной чертой. Такие блоки создаются при использовании инструментальной панели «Программирование» и занимают один регион.

Определенные однажды объекты могут быть переопределены в последующих регионах. Таким образом, при интерпретации действий с объектом актуально последнее, ближайшее к точке выполнения определение его типа. Если на рабочем листе есть несколько операторов глобального назначения  $\equiv$ , то свойство «глобальности» сохраняет только последний из них.

MathCAD содержит несколько сотен встроенных стандартных функций, которые можно использовать в расчетах. Для вставки функции нужно нажать пиктограмму или в меню выбрать опцию «Вставить Функцию» – откроется окно выбора (*Рис. 5*), где все функции размещены по категориям.



*Рис. 5 – Диалоговое окно выбора стандартной функции из библиотеки*

### **Операторы индикации значений**

Весьма часто при выполнении вычислений требуется выводить на экран значения того или иного объекта, либо результата выполнения выражения. Эта задача решается *операторами индикации значений*. В *MathCAD* существуют два вида операторов индикации:

- $=$  оператор индикации числовых значений;
- $\rightarrow$  оператор индикации символьных значений.

$$x := \frac{1}{3} \quad x \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$x = 3.333333333 \times 10^{-1}$$

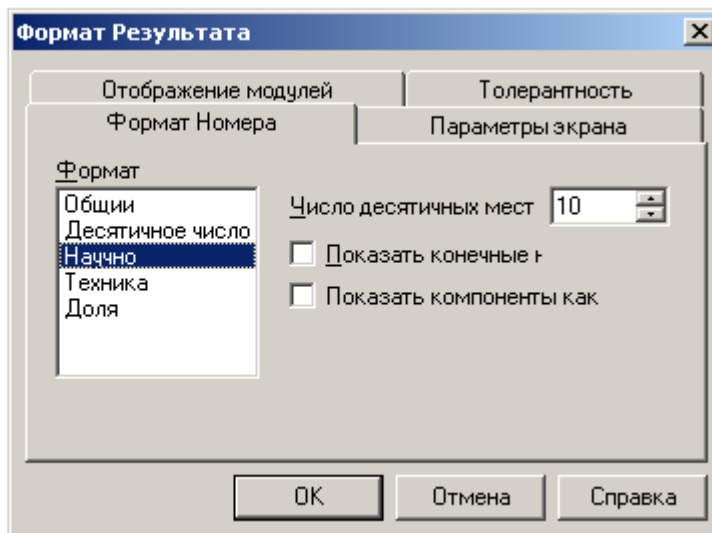


Рис. 6 – Диалоговое окно задания формата вывода чисел

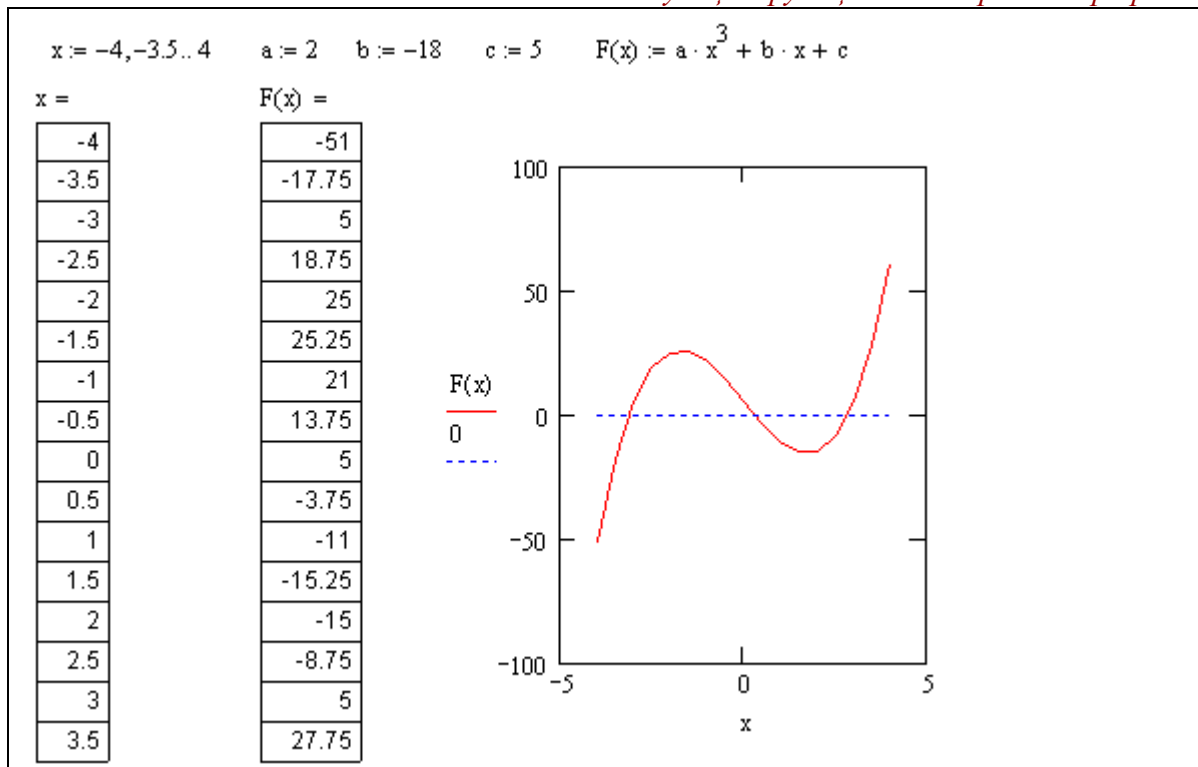
Оператор индикации символьных значений  $\rightarrow$  применяется для вывода результатов символьных преобразований, значений объектов, в составе которых имеются компоненты с неопределенными числовыми значениями. Такими объектами являются, например, функции с формальными параметрами, формульные выражения при выполнении над ними операций *символьных преобразований* (Рис. 6).

## 2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

### 2.1. Табличный и графический способ поиска корней

Задача решения нелинейных (трансцендентных) уравнений состоит в поиске всех значений переменных, удовлетворяющих данному уравнению. На листинге ниже (*Листинг 2*) приводится пример поиска корней кубической параболы  $F(x)$ , на интервале  $x \in [-5, 5]$ . Этот способ визуальный и очень грубый.

*Листинг 2. Табуляция функции и построение графика*



Корни могут быть уточнены методом табуляции – вычисления значений функции в точках  $x$ , выбираемых из интервала  $[-4, 4]$  с шагом 0.5. Точность вычисления корней при таком методе не превосходит  $\varepsilon=0.5$ . Для выделения корня с заданной точностью необходимо повторить вычислительный эксперимент требуемое число раз, уменьшая каждый раз границы интервала табуляции, шаг табуляции и точность вывода полученных значений на экран (*Рис. 6*).

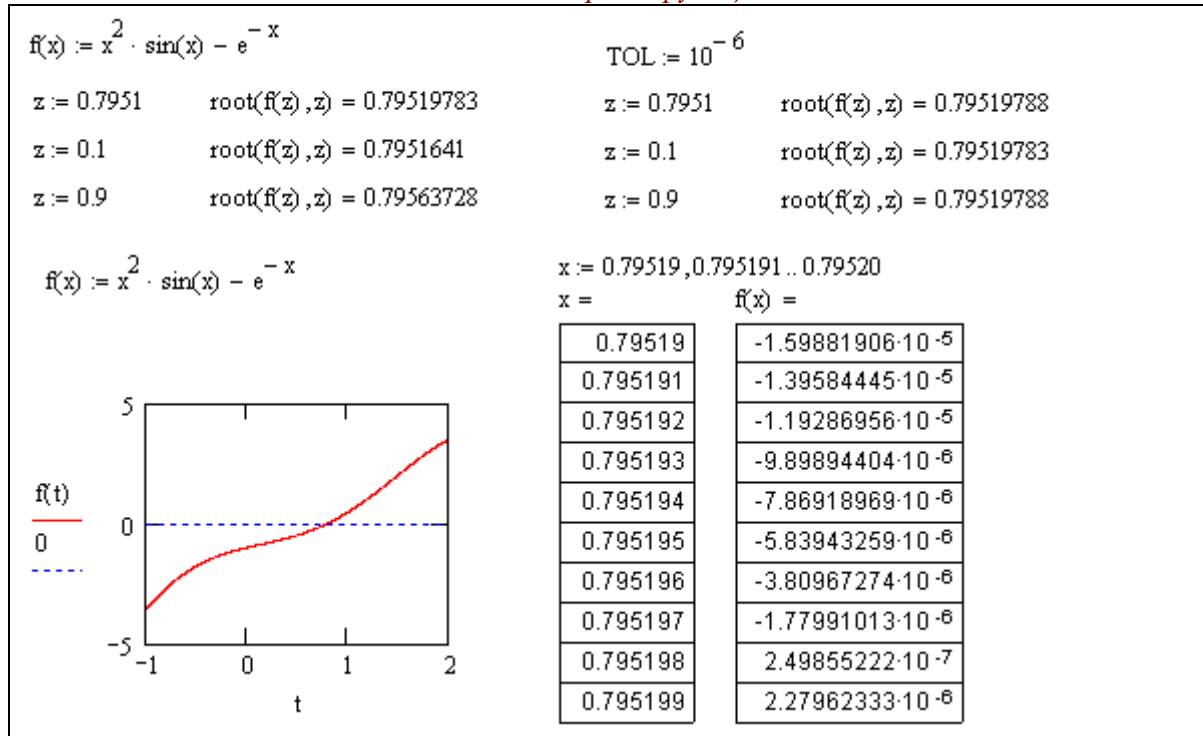
В пакете *MathCAD* существует встроенная функция  $root(f(x), x)$ , выполняющая такие действия автоматически. Нужно только явно задать функцию  $f(x)$  и начальное значение  $x_0$ , от которого начинается итерационное численное уточнение корня.

В примере (*Листинг 3*) приведены примеры уточнения корня трансцендентной функции  $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$ , для различных начальных условий.

Можно видеть, что значения отличаются друг от друга, начиная с четвертого знака после запятой. Это связано с тем, что точность расчетов по умолчанию имеет значение  $TOL = 10^{-3}$ .

Численные расчеты всегда выполняются с определенной точностью. Эта точность задается константой  $TOL$ .

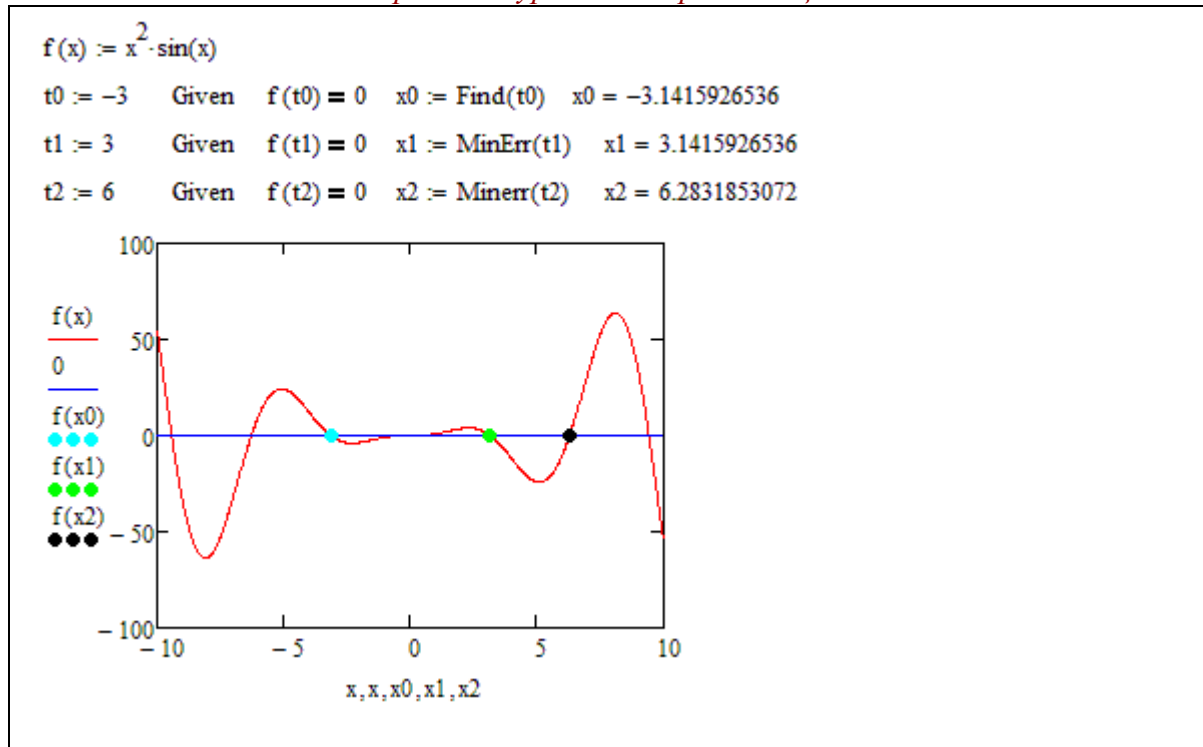
Меняя принудительно значение  $TOL$ , как в примере (*Листинг 3*), можно управлять точностью вычислений.



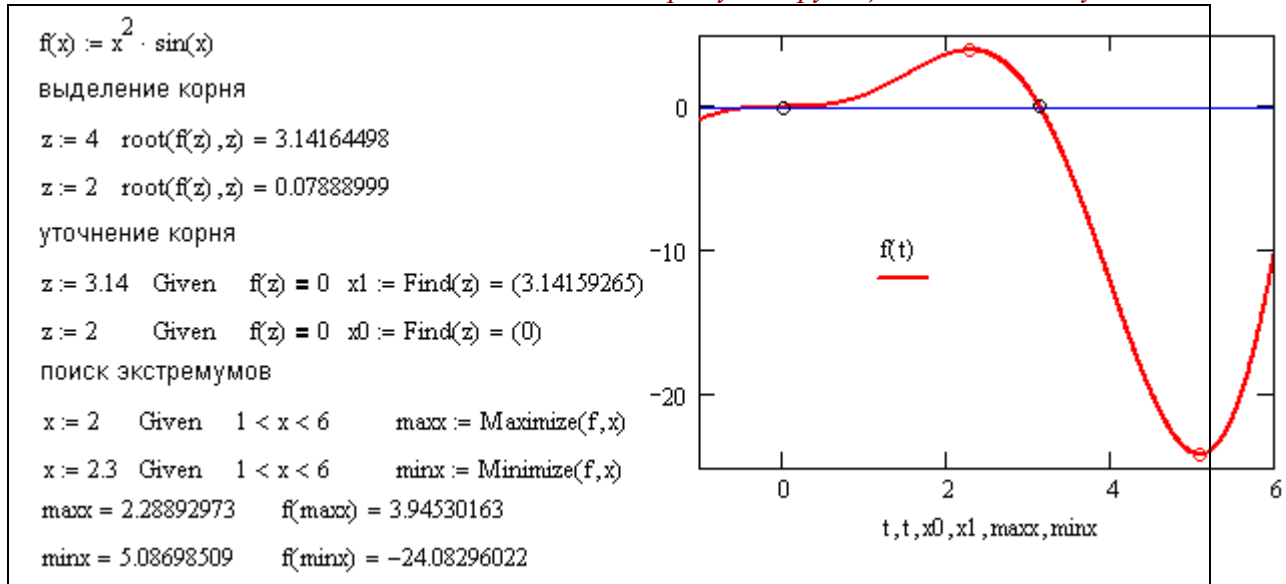
## 2.2. Аналитические функции поиска корней нелинейного уравнения

Пара операторов *Given-Find* и *Given-Minerr* позволяет находить корни уравнения аналитически (см. Листинг 4). Здесь точность вычисления корня не зависит от *TOL*, а ограничивается точностью округления вещественных чисел.

Листинг 4. Поиск решения уравнений при помощи *Given-Find* и *Given-Minerr*



Для автоматизированного поиска экстремумов функции используются операторы *Given-Minimize* и *Given-Maximize* (Листинг 5). Для выполнения поиска экстремумов необходимо задать начальное приближение  $x$ , так как максимумов и минимумов у функции может быть несколько, и поиск производится в окрестности начального приближения.



Кроме того, диапазон поиска экстремума можно ограничить при помощи неравенства-ограничения, накладываемого на начальное приближение  $x$ . Список неравенств-ограничений (в предыдущем примере он такой:  $1 < x < 6$ ) располагается после оператора *Given*, но перед *Minimize* или *Maximize*.

### 2.3. Практическая работа №1. Вычисления на MathCAD

Продолжительность – 2 часа.

#### Цель работы

1. Устранение у вчерашнего школьника страха перед громоздкими вычислениями и сложными функциями. Закрепление уверенности в своих способностях. Демонстрация возможностей *MathCAD*.

2. Получение навыков отладки программы, выполнения вычислений и вывода результатов. Нарботка умения задавать переменные, константы и графики на рабочем поле *MathCAD* при помощи шаблонов.

#### Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD*. Вычислить значение математической функции  $p(x, y)$  в заданной точке  $(x_0, y_0)$ . Индивидуальные варианты заданий содержит *Таблица 3 (см. Приложение 1)*. Вывести результат до десятого знака после запятой. Продемонстрировать преподавателю выполнение программы

2. Найти все корни уравнения  $f(x)=0$  с заданной точностью  $\varepsilon$  из заданного диапазона (Индивидуальные варианты заданий содержит

*Таблица 4, см. Приложение 1*) различными способами:

- табуляцией функции с подбором шага;
- графически;
- численно – при помощи функции  $root(f(x), x)$  с точностью  $\varepsilon$ ;
- аналитически – при помощи операторов *Given-Find*;

3. Отыскать и построить на графике все экстремумы функции  $f(x)$  из заданного диапазона (

*Таблица 4, Приложение 1*) значений переменной  $x$ .

4. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести снимки экрана (скриншоты) с результатами работы программ.

#### Контрольные вопросы:

1. Что представляет из себя проект (программа) на *MathCAD*?
2. Какие виды оператора определения (присваивания, назначения) вам известны?

3. Как связаны нули функции и экстремумы производной?
4. Какие пакеты профессиональных математических вычислений вам известны?
5. Опишите окно интерфейса MathCAD. Рабочий лист и регионы.
6. Как установить при выводе на экран количество знаков после запятой?
7. Как задается точность численных расчетов в MathCAD?
8. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как эти участки связаны с поведением производной?
9. Опишите инструментальные панели и шаблоны и методы работы с ними.
10. Как задается диапазон и шаг изменения переменной в MathCAD?
11. Опишите, как задать функцию и вычислить значение этой функции в точке?
12. Что такое корень уравнения?
13. Опишите способ вычисления корней при помощи стандартной процедуры  $root(f(x), x)$ , как можно задать точность вычислений?
14. Что такое нули функции и как их вычислять?
15. Как построить график функции одного параметра, задать диапазон изменения параметров, цвет и ширину линии?
16. Опишите способ вычисления нулей функции при помощи стандартной процедуры *Given-Find* как можно задать точность вычислений?
17. Что такое максимум и минимум функции, как они связаны со значением производной в этих точках?
18. Как построить график функции одного параметра? Как поставить точку на графике?
19. Опишите способ вычисления максимумов (минимумов) функции при помощи стандартной процедуры *Given-Maximize* и *Given-Minimize*. Как можно задать точность вычислений?
20. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как они выглядят на графике, как их можно вычислить? Как эти участки связаны с поведением производной?
21. Как построить график прямой, параллельной оси Oх или оси Oу?
22. Как определить экстремумы функции по поведению производных?
23. Опишите способ вычисления нулей функции при помощи стандартной процедуры *solve*. Как можно задать точность вычислений? Как установить количество десятичных знаков, отображаемых на экране?
24. Что такое экстремум функции? Как его находить?




### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Общая схема исследования функции известна еще из курса средней школы:

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет;
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты функции.
9. Построить график функции.

Рассмотрим, насколько облегчается этот процесс при использовании *MathCAD*. Рассмотрим сначала последний (целевой) пункт списка – построение графика. Средства *MathCAD* позволяют *начать(!)* исследование функции с построения графика. Согласитесь, это значительно проще и нагляднее. Однако, имейте ввиду, что построение графика – это еще не конец исследований, это начало.

#### 3.1. Вывод графиков в MathCAD

Вывод графической информации производится в графических регионах с использованием *шаблонов*, создаваемых инструментами панели «Графики». На рисунке показан начальный вид шаблона в прямоугольной (декартовой) системе координат (значок  или комбинация клавиш *Shift+2*). Здесь изображена прямоугольная область «экрана», на которой будет строиться график, а также имеются поля ввода выражения для переменной, значения которой отображаются по вертикальной оси (*Поле Y – ордината*) и переменной, отображаемой по горизонтальной оси (*Поле X – абсцисса*).

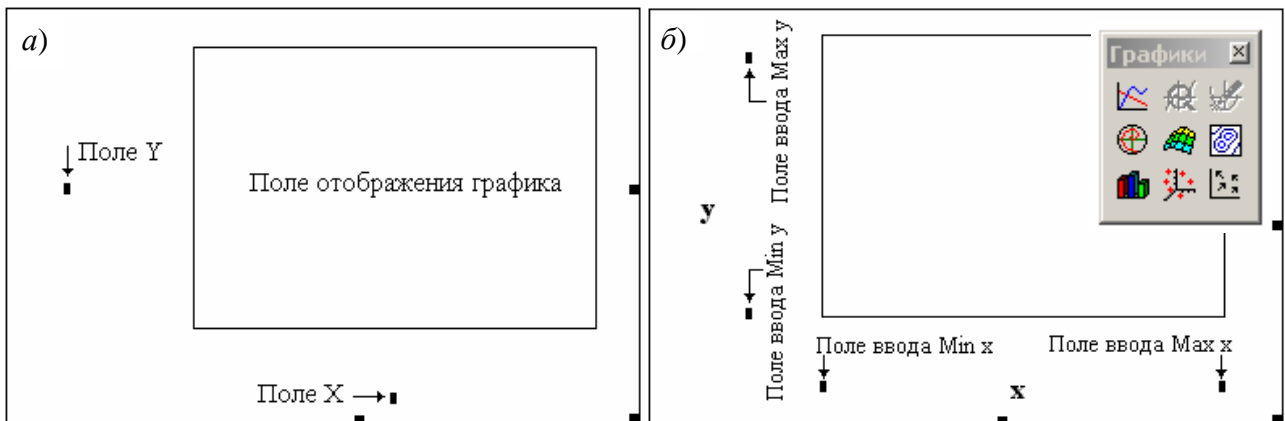


Рис. 7 – Шаблон вывода графика

После занесения выражений отображаемых переменных на шаблоне появляются поля ввода *границ диапазонов* этих переменных (*Min X*, *Max X*, *Min Y*, *Max Y*), в пределах которых происходит построение графика (Рис. 7, б). Если выражение для  $y(x)$  определено к моменту заполнения шаблона, то график выдается сразу после его занесения в *Поле Y*, при этом границы изменения  $x$  устанавливаются по умолчанию, а границы изменения  $y$  определяются автоматически.

В *MathCAD* при построении графиков непрерывных зависимостей  $y(x)$  производится автоматический выбор шага независимой переменной  $x$ . Если требуется, выбора шага построения графика можно *задать принудительно*. Для этого надо перед графическим регионом ранжировать массив  $x$  переменных с требуемым шагом

изменения, например,  $x := 0, 0.1 .. 1$ . В этом случае при построении графика значения  $y(x)$  будут вычисляться только в точках  $x_1=0; x_2=0.1; x_3=0.2$  и т.д. до  $x_{11}=1$ . Массивы значений  $(x_i, y(x_i))$  будут образовывать узловые точки графика, по умолчанию узловые точки графика будут соединены отрезками прямой.

Графические регионы позволяют строить в одних осях несколько графиков одновременно. Для этого необходимо в Поле Y поместить список выводимых переменных, разделенных запятыми. Запятая при этом не отображается, а каждое имя вводимой переменной помещается на новую строку. На рисунке (Рис. 8, а) приведен пример графика, отображающего две различные зависимости (от одной переменной  $x$ ).

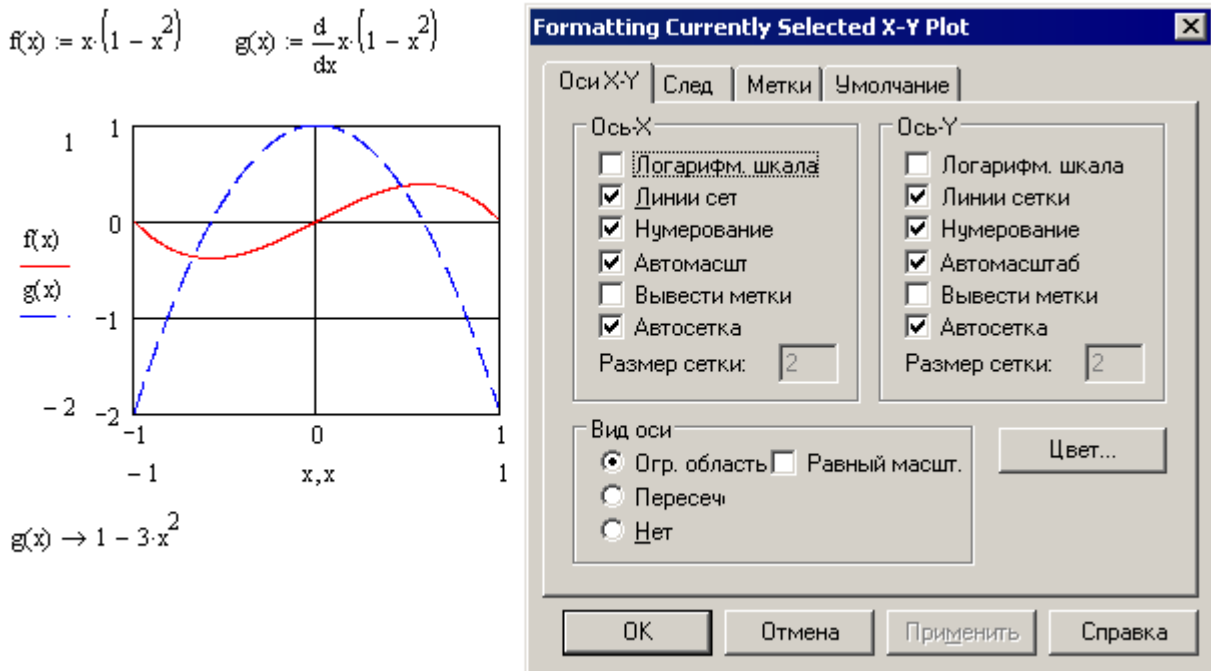


Рис. 8 – Вывод нескольких графиков в одних осях. Панель настройки графика

Абсциссы графиков так же могут быть представлены разнотипными переменными – как дискретными, так и непрерывными, они так же должны перечисляться через запятую.

График в MathCAD допускает гибкую настройку. Двойной клик в поле шаблона вызывает на экран диалоговое окно настройки с четырьмя вкладками (Рис. 8, б). Назначение большинства элементов управления, размещенных на вкладках окна, понятно из соответствующих подписей.

На вкладке X-Y Axes устанавливаются параметры осей графика и размерной сетки в его поле. Вкладка Traces позволяет настроить параметры линий, отображающих графики. Здесь можно выбрать тип графика (Type), цвет отображения графика (Color), вид линии (Line), вид символа, помечающего положение узловых точек (Symbol).

### 3.2. Исследование функции при помощи пакета MathCAD

#### Исследование области определения

Это очень важный шаг исследования функции, так как все дальнейшие действия будут проводиться на области определения.

В приложении к элементарным функциям и их суперпозициям, учитываются следующие знания:

- для дробных функций  $f(x)/g(x)$  необходимо найти нули знаменателя и исключить их из области определения  $g(x) \neq 0$ ;
- для логарифмической функции  $\log_a(g(x))$  – область определения задается неравенством  $g(x) > 0$ ;

- для корня  $\sqrt[n]{g(x)}$  четной степени  $n$  – область определения находится из неравенства  $g(x) \geq 0$ .

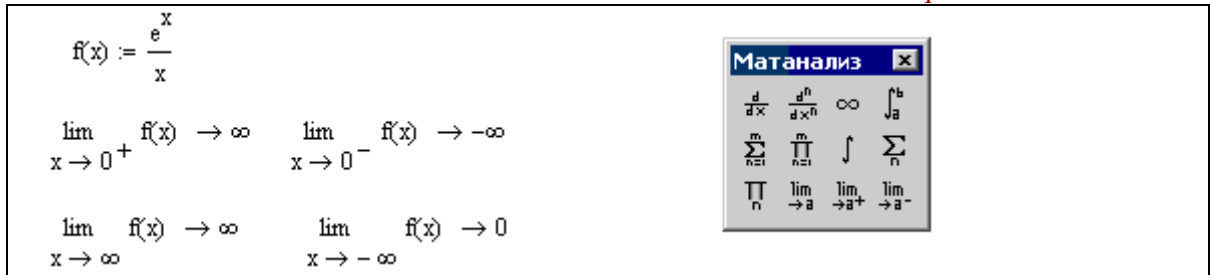
Если имеется возможность сразу же оценить область значений функции, то это необходимо сделать.

### Вычисление пределов функции в MathCAD

Самое главное при исследовании области определения – осмыслить поведение функции на ее границах – в особых точках и на бесконечности (при  $x \rightarrow \pm\infty$ ). На этом этапе, как правило, выявляются вертикальные асимптоты.

При этом используется такой шаблон, как *предел функции справа (слева)*:

Листинг 6. Вычисление пределов в MathCAD



Область определения приведенной на листинге функции:  $x \neq 0$ , то есть  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . С учетом вычисленных пределов, можно заключить, что прямая  $x = 0$  – вертикальная асимптота, при  $x \rightarrow +\infty$  функция стремится вверх со скоростью экспоненты, а при  $x \rightarrow -\infty$  монотонно возрастает бесконечно, приближаясь к нулю снизу.

### Четность и периодичность функции

Следующий шаг – поиск точек пересечения с осями координат (корней уравнения  $f(x) = 0$ ) – детально рассматривалось в *главе 2* данного пособия и закреплялось в самостоятельной работе (*Практическая работа №1. Вычисления на MathCAD*).

Упростить работу над исследованием функции помогает знание о четности/нечетности и периодичности/непериодичности функции. В MathCAD не имеется встроенных инструментов, позволяющих сразу дать ответ на эти вопросы, но методика вычисления значений  $f(x)$  в любой точке области определения и наличие функции «модуль»  $|x|$  существенно облегчают работу в этом направлении.

Не забывайте, что определение периодичности функции рассматривается только для тригонометрических функций, остальные элементарные функции – непериодические.

### Построение точек экстремума и точек перегиба

Из определения и геометрических свойств производной функции в точке следует, что изменение знака первой производной определяет участки монотонности функции и точки экстремума, а знак второй производной – участки выпуклости (вогнутости) и точки перегиба.

В MathCAD существует встроенный инструмент, позволяющий *аналитически находить производную любой функции*, составленной из произвольной комбинации элементарных функций. Если же этого не достаточно, то существует возможность *численно находить производную любой функции* в точке (из области определения).

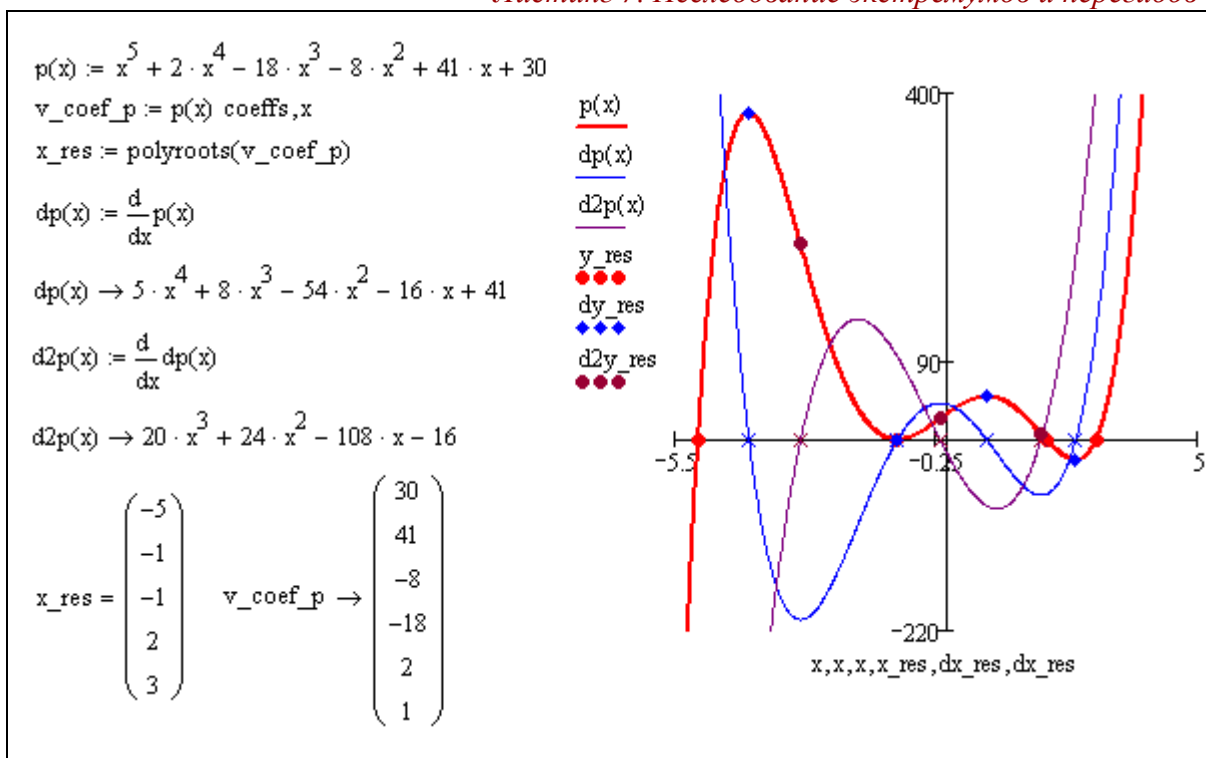
Как видно из примера (*Листинг 7*), корни полинома  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  можно найти используя встроенную функцию **polyroots(v)**. В качестве аргумента функции **polyroots** должен вводиться вектор коэффициентов полинома  $v = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ . А результат действия функции

$polyroots$  – это вектор корней полинома  $p(x)$ , причем, кратные корни встречаются положенное количество раз.

В примере (Листинг 7) опущен процесс поиска корней производной функции  $dp(x)$  – точек экстремума и корней второй производной  $d^2p(x)$  – точек перегиба: этот поиск производится аналогично при помощи функции  $polyroots$ .

Исследование полинома – самый простой из примеров исследования функции. Полином 5 степени, очевидно, имеет 5 корней –  $(x_1 = -5, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 3)$ , и (так как первая производная имеет 4-ю степень) – 4 экстремума:  $(x'_1 = -3.981, x'_2 = -1, x'_3 = 0.797, x'_4 = 2.584)$ . Кроме того, он имеет 3 точки перегиба  $(x''_1 = -2.943, x''_2 = -0.144, x''_3 = 1.887)$ , так как вторая производная имеет 3-ю степень.

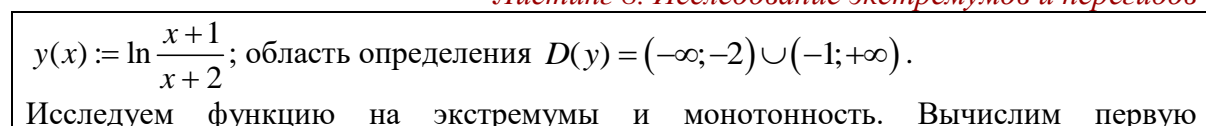
Листинг 7. Исследование экстремумов и перегибов



Возможность автоматически строить производные практически любой функции в комплексе с богатым набором средств отыскания корней функции (рассмотренным в Гл. 2 Решение нелинейных уравнений в MathCAD) делают задачу отыскания точек экстремума и точек перегиба чрезвычайно легкой. Для этого необходимо:

- вычислить  $dp(x) = df(x)/dx$  – первую производную функции  $f(x)$  и найти ее корни аналитически или численно (см. главу 2);  
найденные точки – *точки экстремума*, а интервалы между ними и границами области определения – *участки монотонности*;
- вычислить  $ddp(x) = d^2 f(x)/dx^2 = dp(x)/dx$  – вторую производную функции  $f(x)$  (или первую производную от  $dp(x)$ ) и найти ее корни;  
найденные точки – *точки перегиба*, а участки, расположенные между *точками перегиба* и границами области определения – *участки вогнутости или выпуклости*.

Листинг 8. Исследование экстремумов и перегибов

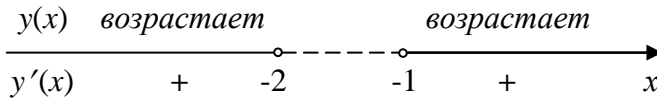


производную:

$$y(x) := \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \quad dy(x) := \frac{d}{dx}y(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)} \quad dy(x) \rightarrow \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)}$$

Находим особые точки  $x_1 = -1, x_2 = -2$ . Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$$dy(5) = 0.024 \quad dy(-5) = 0.083$$



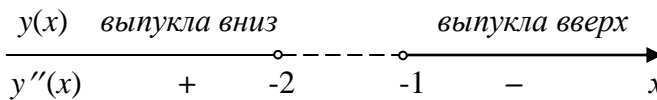
Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -2), (-1; +\infty)$ . Экстремумов нет.

Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2}y(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-(2 \cdot x + 3)}{(x+2)^2 \cdot (x+1)^2} \quad ddy(x) \rightarrow \frac{(-2) \cdot x - 3}{(x+2)^2 \cdot (x+1)^2}$$

Особые точки  $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -1.5$ . Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$$ddy(5) = -7.37 \times 10^{-3} \quad ddy(-5) = 0.049$$



Функция выпукла вниз на интервале  $(-\infty; -2)$  и выпукла вверх на  $(-1; +\infty)$ . Перегибов нет.

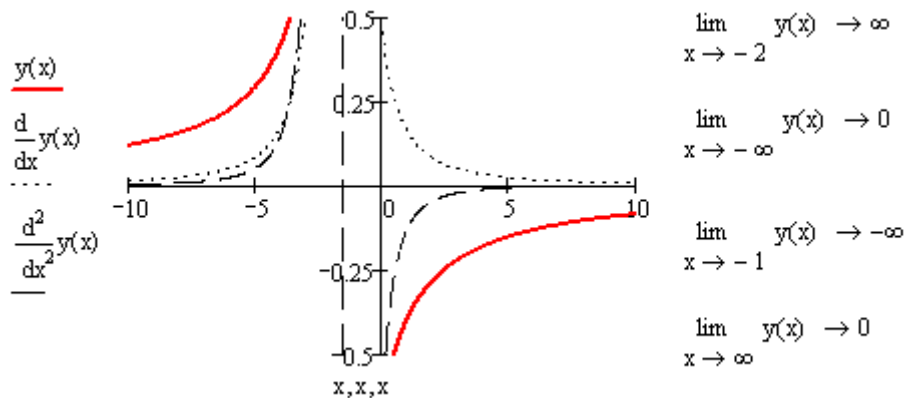


Рис. 9 – Исследование экстремумов и перегибов (2)

Листинг 9. Исследование экстремумов и перегибов

$y(x) := \frac{e^x}{x}$ ; область определения  $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Рассмотрим поведение функции в особой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) \rightarrow -\infty \quad . \quad y(x) \equiv 0 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

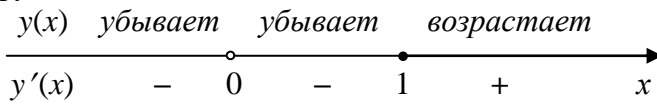
Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную:

$$y(x) := \frac{e^x}{x} \quad dy(x) := \frac{d}{dx}y(x) \text{ simplify} \rightarrow e^x \cdot \frac{x-1}{x^2} \quad dy(x) \rightarrow e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$$

Находим точки экстремума:

$$\text{Given } dy(t) = 0 \quad x0 := \text{Find}(t) \quad x0 = 1 \quad y(x0) \rightarrow e \quad y0 := y(x0) \quad y0 = 2.718$$

Первая производная пересекает ось  $OX$  в точке  $(1, e)$  – экстремум. Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:



Функция убывает на интервалах  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1]$  и возрастает на интервале  $[1; +\infty)$ .

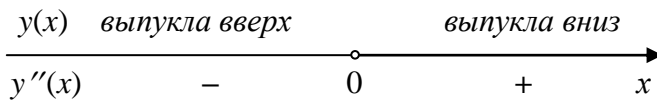
Точка  $(1, e)$  – точка минимума.

Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \text{ simplify } \rightarrow e^x \cdot \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x^3} \quad ddy(x) \rightarrow e^x \cdot \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x^3}$$

Особая точка  $x = 0$ , действительных корней нет. Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$$ddy(-3) = -0.031 \quad ddy(3) = 3.72$$



Функция выпукла вверх на интервале  $(-\infty; 0)$  и выпукла вниз на  $(0; +\infty)$ . Перегибов нет.

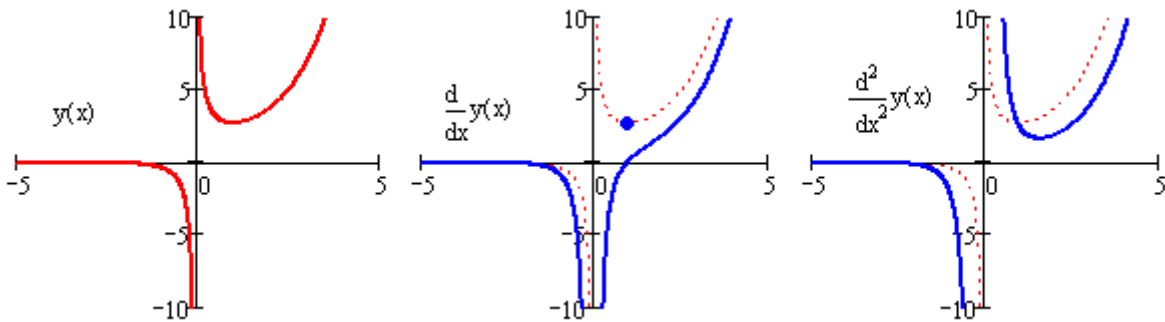


Рис. 10 – Исследование экстремумов и перегибов (3)

Листинг 10. Исследование экстремумов и перегибов

$$y(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1}; \text{ область определения } D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Рассмотрим поведение функции в особых точках:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) \rightarrow \infty$$

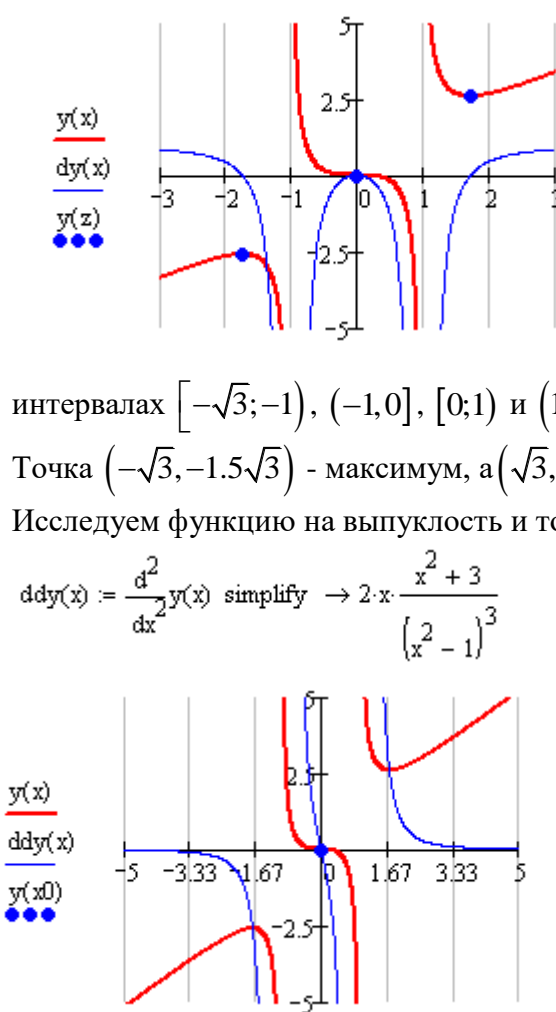
$y(x) \equiv -1$  и  $y(x) \equiv 1$  – вертикальные асимптоты.

Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную:

$$y(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad dy(x) := \frac{d}{dx} y(x) \text{ simplify } \rightarrow x^2 \cdot \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Находим точки экстремума:

$$t := 2 \quad \text{Given} \quad dy(t) = 0 \quad x0 := \text{Find}(t) \quad x0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3^2} & -\frac{1}{3^2} \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} x0 \\ 0 \\ -x0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1.732 \\ 0 \\ -1.732 \end{pmatrix}$$



Первая производная пересекает ось  $OX$  в трех точках  $(-\sqrt{3}, -1.5\sqrt{3})$ ,  $(0, 0)$  и  $(\sqrt{3}, 1.5\sqrt{3})$  – экстремумы. Определим знак производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции. Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -\sqrt{3}]$  и  $[\sqrt{3}; \infty)$  и убывает на интервалах  $[-\sqrt{3}; -1)$ ,  $(-1, 0]$ ,  $[0; 1)$  и  $(1, \sqrt{3}]$ .

Точка  $(-\sqrt{3}, -1.5\sqrt{3})$  – максимум, а  $(\sqrt{3}, 1.5\sqrt{3})$  – минимум.

Исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$ddy(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot x \cdot \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^3}$$

tt := 0.5 Given ddy(tt) = 0 x0 := Find(tt) x0 = 0

Точка перегиба  $x = 0$ . Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые особые точки делят область определения функции:

$y(x)$	вверх	вниз	вверх	вниз			
$y''(x)$	-	-1	+	0	-	1	+

Функция выпукла вверх на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; 0]$  и выпукла вниз на участках  $[0; 1)$  и  $(1; +\infty)$ . Точка перегиба  $x = 0$ .

### Построение асимптот

Асимптоты – это прямые линии, к которым приближается график функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  или при  $x \rightarrow x^* \pm 0$  – на бесконечности или на границах  $x^*$  области определения.

Вертикальные асимптоты – прямые, параллельные оси  $OY$ , задаваемые уравнением  $x = x^*$ , причем  $\lim_{x \rightarrow x^*+0} f(x) = \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x) = \pm\infty$ . При приближении к точке  $x \rightarrow x^* \pm 0$  справа или слева функция  $f(x)$  стремится к бесконечности.

Горизонтальные или наклонные асимптоты ищутся в виде прямых  $y = kx + b$ , где  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  – тангенс угла наклона асимптоты, и  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$  – смещение по вертикальной оси.

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.

Если  $k=0$  и  $b \neq \infty$ , то наклонная асимптота станет горизонтальной.

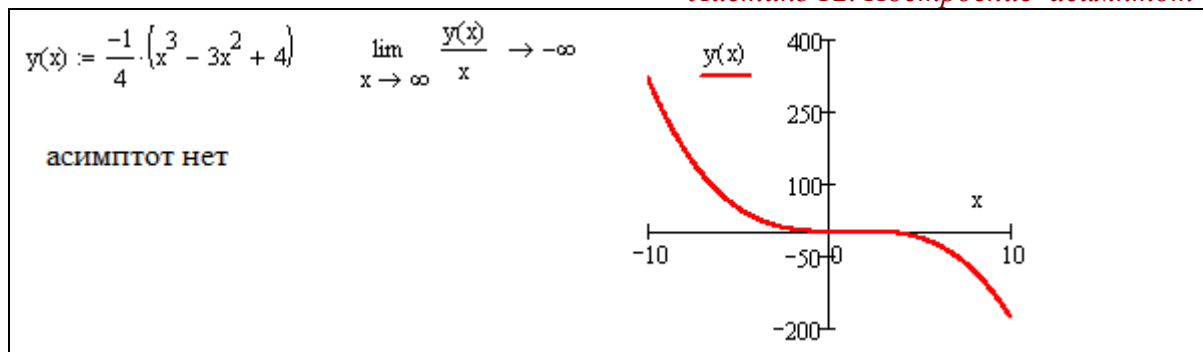
Если горизонтальных или наклонных асимптот нет, но функция определена на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, то следует вычислить предел функции на плюс бесконечности и (или) минус бесконечности, чтобы иметь представление о поведении графика функции.

Рассмотрим примеры:

Листинг 11. Построение асимптот



Листинг 12. Построение асимптот



Листинг 13. Построение асимптот



Листинг 14. Построение асимптот



Данный параграф иллюстрирует, насколько облегчается задача исследования функции с использованием такого мощного инструмента как MathCAD. Выполняемая практическая работа служит для закрепления навыков исследования функций.



### 3.3. Практическая работа №2. Исследование функции.

Продолжительность – 4 часа.

#### Цель работы

1. Демонстрация возможностей *MathCAD* в части исследования функций. Закрепление уверенности в своих способностях и принципиальной убежденности в разрешимости задач любой сложности.

2. Приобретение компетенций в части применения средств *MathCAD* для исследования функции и построения ее графика. Закрепление школьных знаний по исследованию функций одной переменной на более серьезном академическом уровне.

#### Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD*. Провести исследование функции  $f(x)$  в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 5, Приложение 2*) и построить ее график в *MathCAD*.

- 1.1. Построить область определения функции.
- 1.2. Описать поведение функции  $f(x)$  на границах области определения и на бесконечности.
- 1.3. Найти точки пересечения  $f(x)$  с осями координат.
- 1.4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
- 1.5. Определить, является ли функция периодической или нет.
- 1.6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.
- 1.7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
- 1.8. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
- 1.9. Найти горизонтальные и наклонные асимптоты функции.
- 1.10 Построить график функции.

2. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ и график анализируемой функции.

#### Контрольные вопросы:

1. Как связаны экстремумы функции и нули производной?
2. Как связана функция с экстремумами производной? Что происходит в этих точках?
3. Как установить при выводе на экран количество знаков после запятой?
4. Как задается точность численных расчетов в *MathCAD*?
5. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как эти участки связаны с поведением производной?
6. Как задается диапазон и шаг изменения переменной в *MathCAD*?
7. Опишите, как задать функцию и вычислить значение этой функции в точке?
8. Что такое корень уравнения?
9. Что такое непрерывная функция? Дайте строгое определение через пределы.
10. Что такое нули функции и как их вычислять?
11. Как построить в одном окне графики нескольких функции одного параметра? Как задать для них разные параметры?
12. Как найти горизонтальные и наклонные асимптоты функции?
13. Опишите способ вычисления нулей функции при помощи стандартной процедуры *Given-Find* как можно задать точность вычислений?
14. Что такое максимум и минимум функции, как они связаны со значением производной в этих точках?
15. Как построить график функции одного параметра? Как поставить точку на графике?

16. Опишите способ вычисления максимумов (минимумов) функции при помощи стандартной процедуры *Given-Maximize* и *Given-Minimize*. Как можно задать точность вычислений?
17. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как они выглядят на графике, как их можно вычислить? Как эти участки связаны с поведением производной?
18. Как построить график прямой, параллельной оси  $Ox$  или оси  $Oy$ ?
19. Как определить экстремумы функции по поведению производных?
20. Что такое экстремум функции? Как его находить?
21. Как может вести себя функция на бесконечности? Перечислить все случаи.
22. Что такое область определения функции? Что такое особые точки?
23. Описать поведение функции на границах области определения и на бесконечности.
24. Как установить, является ли функция чётной или нечётной. Дайте строгое определение.
25. Как определить, является ли функция периодической или нет. Определение.
26. Как найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
27. Как найти вертикальные асимптоты?
28. Как построить график производной функции. Как он будет соотноситься с графиком основной функции?
29. Опишите понятие предела функции в точке? На бесконечности?
30. Что такое перегибы функции? Как они вычисляются?

#### 4. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ MATHCAD

Система *MathCAD* обладает широкими возможностями для написания сложных алгоритмических конструкций. Алгоритмические команды (*операторы*) вызываются из окна *Programming* (*Программирование*) как на

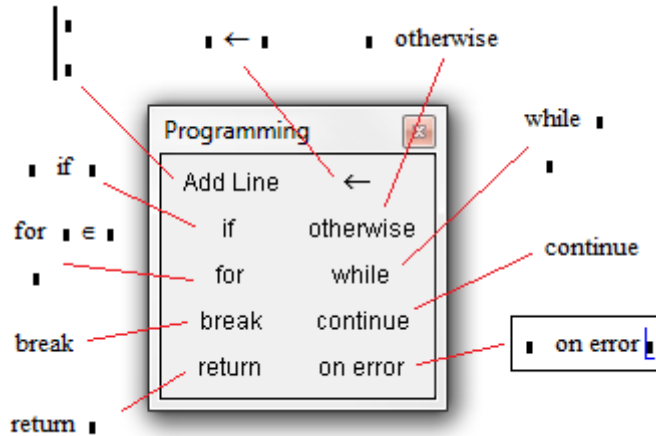


Рис. 11 – Окно вызова алгоритмических команд (*операторов*)

**Операторный блок Add Line.** Вертикальная линия (оператор *Add Line*) объединяет отдельные операторы в *операторный блок* с одним входом и одним выходом, который выполняется как единый оператор. Увеличить количество операторов внутри *операторного блока* можно многократным нажатием на кнопку «Add Line». Внутри операторного блока операторы выполняются последовательно сверху вниз.

**Оператор локального присваивания.** Кнопка «←» – это оператор присвоения значения локальной переменной. Область видимости такой переменной ограничена операторным блоком, задаваемым при помощи *Add Line*. Локальность переменной подразумевает ее невидимость вне операторного блока (программы), что не допускает путаницы переменных из разных программ.

**Оператор выбора.** Шаблон *if* (*если*) позволяет вводить в программу альтернативу с одной ветвью, иначе говоря, *оператор условного перехода*.

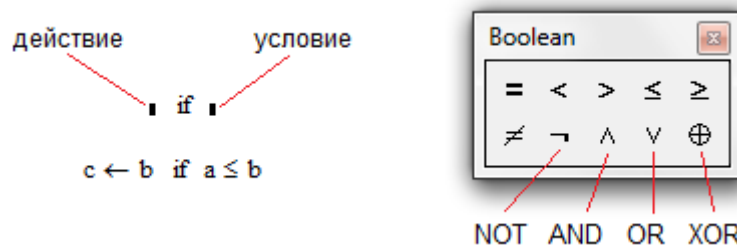


Рис. 12 – Структура оператора *if*. Блок ввода логических команд

Суть условного перехода в проверке *условия*, которое записывается в позиции справа от оператора *if*. Если *условие истинно*, то однократно выполняется *действие*, записанное в позиции слева от оператора *if*, после чего выполнение оператора заканчивается. Если *условие ложно*, то выполнение оператора *if* заканчивается немедленно, без выполнения *действия*.

Условие может состоять из довольно сложной *логической конструкции*, построенной при помощи команд сравнения (=, ≠, <, ≤, >, ≥) и логических команд (NOT, OR, AND, XOR) – как на *Рис. 12*.

Возможности оператора *if* можно существенно расширить при помощи оператора *otherwise* (иначе, в противном случае). Он позволяет реализовать конструкции с двумя исходами (см. Листинг 15, а): в случае истинности условия выполняется одно действие, а в случае его ложности – другое (расположенное перед оператором *otherwise*).

Листинг 15. Оператор *if-otherwise* и функция *if()*

а) $\text{maximum}(a, b) := \begin{cases} a & \text{if } a \geq b \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$ $\text{maximum}(3, 2) = 3 \quad \text{maximum}(3, 4) = 4$	б) $\text{max} \leftarrow \text{if}(A \geq B, A, B)$ $\text{if}(A \geq B, \text{max} \leftarrow A, \text{max} \leftarrow B)$
---	---

Можно также воспользоваться вместо оператора *if* функцией *if()* – как на Листинг 15, б. У встроенной функции *if()* первый аргумент – условие, второй – действие при истинном условии, а третий аргумент – действие при невыполнении условия (*otherwise*).

**Операторы цикла.** В *MathCAD* имеется два оператора циклического повторения – оператор *while* и оператор *for*.

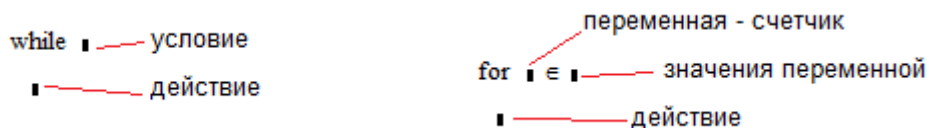


Рис. 13 – Структура операторов *while* и *for*

При выполнении оператора *while* (с предусловием) в первую очередь производится проверка условия, если оно истинно, то выполняется действие, после чего вновь проверяется условие и т.д. до тех пор, пока условие не станет ложным. Программист должен предусмотреть возможность выхода из цикла.

Оператор цикла *for* последовательно перебирает значения переменной-счетчика (слева от значка  $\in$ ) из множества допустимых значений (справа от символа  $\in$ ). Пока переменная-счетчик принадлежит множеству допустимых значений, действие повторяется, как только значение переменной выходит за границы множества, действие цикла заканчивается.

Программные блоки, описанные ниже (Листинг 16), вычисляют сумму  $N$  первых натуральных чисел. На примерах видно, что в операторе *for* изменение переменной-счетчика  $i$  происходит автоматически (неявно) в диапазоне  $1..N$ , в то время как для оператора *while* изменение переменной  $i$  приходится явно прописывать.

Листинг 16. Операторы цикла *while* и *for*

$\text{SumA}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i \leq N \\ \quad \begin{cases} S \leftarrow S + i \\ i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ S \end{cases}$	$\text{SumB}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{cases}$
$\text{SumA}(3) = 6 \quad \text{SumA}(4) = 10 \quad \text{SumA}(5) = 15$	$\text{SumB}(3) = 6 \quad \text{SumB}(4) = 10 \quad \text{SumB}(5) = 15$

На примерах ниже (Листинг 17) иллюстрируются некоторые свойства оператора *for*. Оператор *for* автоматически определяет, в какую сторону необходимо изменять (уменьшать или увеличивать) переменную-счетчик.

Оператор *for* может перебирать значения переменной-счетчика из множества допустимых значений довольно разнородной структуры – числовой, символьной, матричной.

$\text{SumB}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{cases}$ <p><math>\text{SumB}(4) = 10</math></p>	$\text{SumC}(N) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in N..1 \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{cases}$ <p><math>\text{SumC}(4) = 10</math></p>
$\text{SumX} := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1,3,4,7,21,13,101 \\ \quad S \leftarrow S + i \\ S \end{cases}$ <p><math>\text{SumX} = 150</math></p>	$V := \begin{cases} i \leftarrow 0 \\ \text{for } VX \in \begin{pmatrix} 12.3 & \text{"abcd"} \\ 2 + 3 \cdot i & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \begin{cases} V_i \leftarrow VX \\ i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ V \end{cases}$ $V = \begin{pmatrix} 12.3 \\ 2 + 3i \\ \text{"abcd"} \\ 1 \end{pmatrix}$

**Операторы прерывания.** В системе *MathCAD* операторы прерывания представлены тремя командами: *break*, *continue* и *return*.

Операторы *break* и *continue* используются для прерывания работы циклов *for* и *while*, а оператор *return* – для прерывания всего блока операторов.

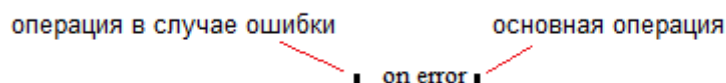
Если при выполнении цикла встречается оператор *continue* (*перезапуск цикла*), то вычисления в теле цикла останавливаются и цикл *запускается снова*. Если в цикле встречается оператор *break* (*прерывание цикла*), то выполнение тела цикла прекращается и происходит *выход из цикла*.

В примере, приведенном ниже (*Листинг 18*), создается функция *PositivSubvector*, выбирающая положительные координаты вектора *x*. Оператор *continue* перезапускает цикл каждый раз, когда встречается отрицательный компонент вектора *x*. В этом же примере строится функция *FirstPositiv*, выбирающая первую положительную координату вектора *x*. Важно, что если такая координата найдена, то оператор *return* останавливает выполнение функции (дальнейший перебор элементов вектора *x* не производится).

*Листинг 18. Операторы continue и return*

$x := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 12 \\ -8 \\ 7 \\ -0.8 \end{pmatrix}$	$\text{PositivSubvector}(v) := \begin{cases} j \leftarrow -1 \\ \text{for } i \in 0.. \text{last}(v) \\ \quad \begin{cases} \text{continue if } v_i \leq 0 \\ j \leftarrow j + 1 \\ w_j \leftarrow v_i \end{cases} \\ w \end{cases}$	$\text{PositivSubvector}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\text{FirstPositiv}(v) := \text{for } i \in 0.. \text{last}(v) \\ \quad \text{return } v_i \text{ if } v_i > 0$	$\text{FirstPositiv}(x) = 2$	

**Оператор on error.** Этот оператор является обработчиком тех или иных ошибок, возникающих при вычислении. Он записывается так:



*Рис. 14 – Структура оператора on error*

Оператор *on error* выполняется следующим образом. Если при выполнении основной операции (расположенной справа от оператора *on error*) происходит ошибка, то вычисление этой операции прекращается и выполняется «операция в случае ошибки» (расположенная слева от *on error*), см. Листинг 19.

Листинг 19. Обработчик ошибок *on error*

$\text{angl1}(x, y) := \frac{x}{y}$	$\text{angl1}(2, 0) = \blacksquare$
$\text{angl2}(x, y) := 10^{10}$ on error $\frac{x}{y}$	$\text{angl2}(2, 0) = 1 \times 10^{10}$ $\text{angl2}(4, 2) = 2$

## 5. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

В курсе линейной алгебры студенты знакомятся с такими понятиями как *матрица* и *вектор*, рассмотрим, какие инструменты для работы с матричными объектами предоставляет *MathCAD*. Под матрицей понимается прямоугольная таблица чисел размерности  $n \times m$ .

*Вектор* – это такая матрица у которой  $n=1$  или  $m=1$ . В средней школе давалось определение вектора как направленного отрезка прямой, важно понимать, что эти определения эквивалентны.


Над векторами и матрицами определены операции *сложения и умножения на число* – эти операции выполняются *поэлементно* и обладают свойствами *линейности*. Дополнительно определены операции произведения матриц и умножения матрицы на вектор. Свойства этих операций рассмотрены ниже.

Кроме того, для матриц введено понятие *определителя* – числа, некоторым образом характеризующего матрицу и понятие *ранга* – размерности линейно-независимой системы векторов, составляющих матрицу. Строгое определение этих понятий дается в курсе высшей математики, здесь мы рассмотрим, как вычислять эти показатели и как ими пользоваться.

### 5.1. Матричные операции MathCAD

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики. Комплекс *MathCAD* содержит достаточно представительную библиотеку встроенных функций, в том числе и функций, работающих с матрицами. Ниже рассмотрены некоторые функции, осуществляющие матричные операции, используемые при выполнении лабораторных и практических работ.

#### *Ввод и редактирование формата матриц с помощью шаблона*

Интерфейс процессора *MathCAD* позволяет вводить матрицы с помощью шаблона, задаваемого в диалоговом окне (Рис. 15,б). Диалоговое окно вызывается командой главного меню *Insert\Matrix*, либо комбинацией клавиш-акселераторов *Ctrl+M*, либо нажатием на пиктограмму  палитры матричных операций (Рис. 15,а).

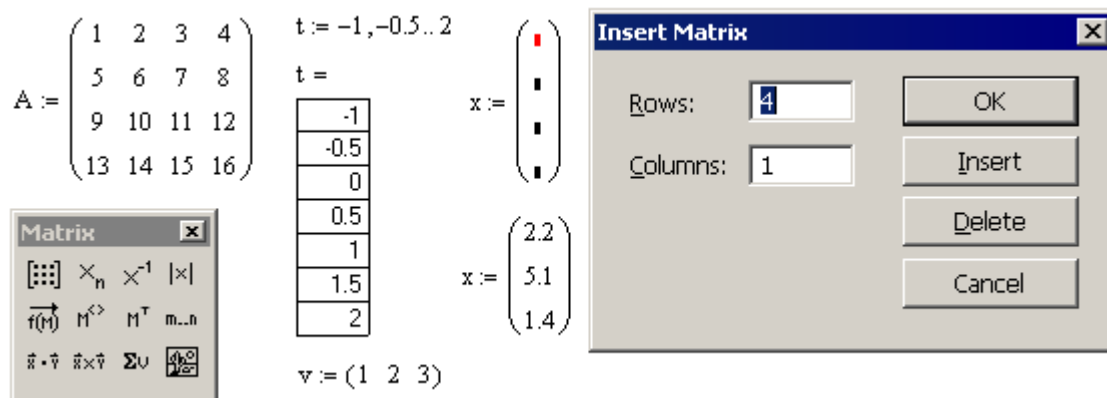


Рис. 15 – Матрицы и вектора в MathCAD. Диалоговое окно ввода матрицы

С помощью этого же диалога можно редактировать формат уже созданных матриц, добавляя/удаляя строки и столбцы. Эти действия вызываются кнопками *Insert* и *Delete*.

Нумерация строк и столбцов в *MathCAD* по умолчанию начинается с *нуля* (Рис. 16). Принцип нумерации элементов матриц можно переопределить с помощью команды **ORIGIN:=1** (после этого матрицы и вектора нумеруются не с 0, а с 1).

Интерпретирующая система блокирует некорректную матричную операцию. При этом некорректный, нереализуемый оператор выделяется измененным цветом шрифта и комментарием в виде всплывающей подсказки. Таким образом, программист может контролировать принципиальную осуществимость матричных операций, связанную, в частности, и с размерностью операндов.

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix} \quad A_{0,0} = 11 \quad A_{4,3} = 54 \quad A_{3,4} = \dots$$

This array index is invalid for this array.

Рис. 16 – Некорректное обращение к элементу матрицы блокируется

**Функции компоновки и декомпозиции матриц и векторов**

В составе библиотеки встроенных функций *MathCAD* имеются функции, позволяющие производить, формировать матрицу из блоков-подматриц и выделять из заданной матрицы подматрицы нужного размера. Компоновку матрицы из блоков осуществляют функции *augment*, *stack*:

Листинг 20. Функции объединения матриц по строкам и столбцам

$$\text{augment} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{stack} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}$$

Выделение подматрицы выполняется функцией *submatrix* и оператором выделения столбца матрицы  $\mathbf{M}^{<>}$ . Функция выделения подматрицы *submatrix* имеет следующий синтаксис вызова:

$$\text{submatrix}(A, row_1, row_2, col_1, col_2),$$

где **A** – исходная матрица, из которой извлекается фрагмент; *row<sub>1</sub>* и *row<sub>2</sub>* – номера начальной и конечной выбираемых строк в матрице; *col<sub>1</sub>* и *col<sub>2</sub>* – номера начального и конечного столбца в матрице A, включаемого в выделяемую подматрицу.

Листинг 21. Функции извлечения подматрицы

$$\text{submatrix} \left[ \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, 1, 3, 1, 2 \right] \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}^{(0)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}^{(2)} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}$$



Для частного случая выделения подматрицы – выделения столбца с заданным номером – в *MathCAD* имеется специальный оператор  $\mathbf{M}^{< >}$ . Строку матрицы  $\mathbf{A}$  можно выделить как при помощи функции `submatrix`, так и при помощи оператора  $\mathbf{M}^{< >}$  (*Листинг 22*).

Приведенный ниже пример (*Листинг 22*) иллюстрирует применение оператора  $\mathbf{M}^T$  – транспонирования матрицы или вектора. Оператор транспонирования делает строки матрицы столбцами, а столбцы – строками, визуально эта операция соответствует зеркальному отражению относительно диагонали.

Листинг 22. Выделение столбца и строки матрицы

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{v1} := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{(1)} \quad \mathbf{v1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \\ 42 \\ 52 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v2} := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}^T \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ \boxed{31 & 32 & 33 & 34} \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \mathbf{v2} = \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 33 \\ 34 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v2} := \mathbf{v2}^T \quad \mathbf{v2} = (31 \ 32 \ 33 \ 34)
 \end{array}$$

### Матричные и векторные арифметические операции

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики.

При умножении матрицы (или вектора) на константу  $K$ , все элементы матрицы (вектора) умножаются на  $K$ .

При сложении (вычитании) матриц (или векторов) суммирование производится по координатам. Складывать и вычитать можно только матрицы (вектора) совпадающей размерности.

Произведение матриц производится по правилу «строка на столбец» – каждый элемент матрицы-произведения есть скалярное произведение вектора-строки первой матрицы на вектор-столбец второй:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}: \quad c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}[m \times n]$ ,  $\mathbf{B}[n \times p]$ ,  $\mathbf{C}[m \times p]$ . Напомним, что элементы матриц в *MathCAD* нумеруются с нуля, поэтому индексы изменяются так:  $i = 0 \dots m - 1$ ,  $j = 0 \dots p - 1$ .

Естественно в формуле (1) требовать, чтобы количество столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  совпадало с количеством строк матрицы  $\mathbf{B}$  – такие матрицы называются *согласованными* или *сцепленными*.

Листинг 23. Арифметические операции с матрицами

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = 0 \quad \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 31 & 41 \\ 51 & 61 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 25 & 33 \\ 41 & 49 \end{pmatrix} \quad 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Нельзя забывать, что в отличие от произведения чисел, матричное произведение не коммутативно, т.е., в общем случае  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ , подтверждение этому легко построить (см., например *Листинг 24*):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

Для создания единичной и диагональной матриц заданного размера  $n \times n$  в *MathCAD* можно использовать функции *identity(n)*. и *diag(x)* соответственно (Листинг 25), здесь вектор  $x$  – вектор диагональных элементов создаваемой матрицы.

Единичная матрица  $E$  выполняет роль единицы при матричном умножении, а нулевая матрица  $0$  – роль нуля. Обучаемому предлагается проверить свойства этих матриц:  $A \times E = A$ ,  $E \times A = A$  и  $A \times 0 = 0$ ,  $0 \times A = 0$ .

Листинг 25. Создание единичной и диагональной матриц

$$\text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{identity}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |D| = 6$$

### Функции определения размеров матриц

Возможны ситуации, когда для вычислительного процесса необходимы сведения о размерах матриц, которые становятся известны только после их формирования в ходе вычислений. Для получения такой информации используются функции определения количества строк и столбцов в матрицах *rows* и *cols*.

Листинг 26. Использование функций rows и cols

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C := \text{augment}(A \cdot B, \text{identity}(\text{rows}(A \cdot B)))$$

$$\text{rows}(C) = 3 \quad \text{cols}(C) = 6 \quad C = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 124 & 131 & 0 & 1 & 0 \\ 181 & 192 & 203 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \quad C := \text{stack}(C, \text{identity}(\text{cols}(C))^{\langle 0 \rangle T})$$

$$\text{rows}(C) = 4 \quad \text{cols}(C) = 6 \quad C = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 124 & 131 & 0 & 1 & 0 \\ 181 & 192 & 203 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На Листинг 26 приведен пример довольно сложного формирования матрицы  $C$  из матриц  $A$  и  $B$  с использованием функций *rows* и *cols* для определения размеров промежуточных матриц.

Применение функций *rows* и *cols* повышает универсальность выражений, использующих матричные операции, они становятся менее зависимыми от конкретных размеров исходных матриц.

При программировании нестандартных пользовательских операций с элементами матриц особенно важно знать их размерность для организации циклов.

### Оператор $|x|$

Листинг 27. Вычисление определителя квадратной матрицы

$$D := \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |D| = 6 \quad \left| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Расчет определителя квадратной матрицы в *MathCAD* производится оператором  $|A|$ . Попытка применить этот оператор к неквадратной матрице с количеством столбцов более одного вызывает ошибку.

**Формирование матрицы или вектора на основе заданной функции**

В ряде случаев значения элемента матрицы  $a_{i,j}$  можно связать со значениями его индексов некоторой функцией от двух целочисленных аргументов:  $a_{i,j} = F(i, j)$ . В этом случае матрицу произвольного размера можно сформировать при помощи встроенной функции  $matrix(m, n, F)$ , где  $m$  и  $n$  – число строк и столбцов в создаваемой матрице,  $F$  – имя функции.

Листинг 28. Формирование матриц функцией matrix

```

F(x,y) := 2x+y
F(3,4) = 128
matrix(4,5,F) =
( 1 2 4 8 16
  2 4 8 16 32
  4 8 16 32 64
  8 16 32 64 128 )
A := matrix(3,3,F)  A =
( 1 2 4
  2 4 8
  4 8 16 )
    
```

Матрицу произвольного размера можно сформировать, задавая значение каждому элементу с помощью оператора назначения (Листинг 29). Перебор множества индексов может быть произведен с помощью ранжированных переменных (создание матрицы **A**), либо с использованием операторов цикла в программном блоке (создание матрицы **B**). Как видно из приведенного примера, результат одинаков.

Листинг 29. Поэлементное формирование матриц

```

i:=0..2
j:=0..5  Ai,j := i+j  A =
( 0 1 2 3 4 5
  1 2 3 4 5 6
  2 3 4 5 6 7 )
B :=
for i ∈ 0..2
for j ∈ 0..5
di,j ← i+j
d
B =
( 0 1 2 3 4 5
  1 2 3 4 5 6
  2 3 4 5 6 7 )
    
```

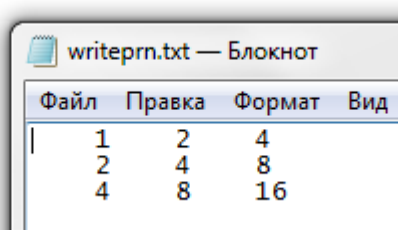
**Сохранение матриц и векторов в файле**

Для сохранения матриц в текстовых файлах и чтения их в системе MathCAD имеется семейство встроенных функций:

- **READPRN**("путь\_к\_файлу") – чтение данных в матрицу из текстового файла;
- **WRITEPRN**("путь\_к\_файлу") – запись данных из матрицы в новый текстовый файл;
- **APPENDPRN**("путь\_к\_файлу") – дозапись данных из матрицы в уже существующий текстовый файл.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

```
WRITEPRN("G:\writeprn.txt") := A
```



```
B := READPRN("G:\writeprn.txt")
```

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Рис. 17 – Работа с файлами в MathCAD

Функции WRITEPRN и APPENDPRN отличаются тем, что при записи матрицы в файл первой функцией прежнее содержимое файла (если оно есть) будет стерто, а функция APPENDPRN допишет матрицу в конец адресуемого текстового файла.

Текстовая строка "путь\_к\_файлу" может содержать как полный путь к файлу, так и сокращенный – только имя файла, который должен в этом случае размещаться в рабочем каталоге.

## 5.2. Матричные функции

### Целочисленные степени квадратных матриц

В среде *MathCAD* целочисленная степень матрицы (в том числе отрицательная) задается точно так же, как и степень обычных числовых переменных (*Листинг 30*). В том случае, когда матрица не имеет обратной, попытка вычислить ее какую-либо отрицательную степень блокируется с выдачей соответствующего сообщения. Нулевая и положительная степень квадратной матрицы вычисляются всегда.

Листинг 30. Целочисленная степень матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = -5 \quad \left| \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \right| = 25 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

### Матричные ряды

Существование целочисленных степеней квадратной матрицы (*Листинг 30*) позволяет ввести матричные степенные ряды с числовыми коэффициентами. Из математики известно, что некоторые функции одной переменной  $f(x)$  представляются степенными рядами, в общем случае бесконечными, по неотрицательным степеням  $x$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot x^k. \quad (2)$$

Если в таком ряду формально заменить скалярную переменную  $x$  на квадратную матрицу  $\mathbf{A}$ , то получим обобщение функции  $f(x)$  в матричную функцию матричного аргумента:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \mathbf{A}^k, \quad (3)$$

где  $\alpha_k$  – постоянные коэффициенты.

Здесь мы не будем касаться принципиального вопроса сходимости матричного ряда, поскольку это специальный раздел теории матриц, изложение которого выходит за пределы настоящего курса.

В приложении к решению систем дифференциальных уравнений и в теории устойчивости А.М. Ляпунова, которые будут изучаться на последующих семестрах курса «Высшая математика», важную роль играет матричная экспонента:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k \cdot t^k}{k!}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица,  $t$  – скалярная переменная.

Через матричную экспоненту выражается аналитическое решение системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### Оператор векторизации функций

В наборе инструментов матричных операций имеется оператор векторизации функций. Пусть  $f(x)$  определена как функция скалярного аргумента и задана  $\mathbf{M}$  – матрица произвольных размеров с элементами  $\mathbf{M}_{i,j}$ .

Листинг 31. Целочисленная степень матрицы

$$f(x) := x^2 + 4 \quad \overrightarrow{f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\sin\left(\begin{pmatrix} \pi & -\pi \\ \pi & \pi \\ \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.707 \\ 0.866 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 - i & 4 \end{pmatrix} \right| = -14 + i$$

Операция векторизации функции  $\vec{f}(x)$  вызывает появление матрицы с элементами  $f(M_{i,j})$ , т.е. происходит поэлементное функциональное преобразование матрицы-аргумента в матрицу-результат того же размера.

Как видно из приведенных примеров, векторизованный оператор  $|x|$  выполняет замену элементов матрицы их абсолютными величинами, причем для комплексных чисел берется модуль. Матрица-аргумент может быть произвольного размера.

### 5.3. Практическая работа № 3 Матричные операции. Линейная алгебра

Продолжительность – 2 часа.

#### Цель работы

Освоение умений, навыков и компетенций работы с матрицами и векторами в *MathCAD*. Закрепление знаний, полученных в курсе «Высшая математика» в разделах «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Векторный анализ».

#### Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD* и произвести перечисленные ниже исследования в соответствии со своим вариантом индивидуального задания (*Таблица 6, Таблица 7, см. Приложение 3*). Продемонстрировать преподавателю выполнение программы.

2. Запрограммировать вычисление определителя матрицы  $A$   $[4 \times 4]$  путем разложения матрицы по соответствующему столбцу (или строке) в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 6*). Сравнить результаты с вычислением определителя при помощи встроенного оператора  $|A|$ .

3. Вычислить ранг матрицы  $A$ , после чего:

- если  $rank(A) = cols(A) = rows(A)$ , построить обратную матрицу  $A^{-1}$  и доказать, что она построена правильно;
- если  $rank(A) < cols(A)$ , то доказать что какой-то из столбцов (или какая-то из строк) матрицы  $A$  является линейно-зависимой от других – построить его (её) линейную комбинацию (*Листинг 33, Листинг 34*).

4. Сформировать матрицу  $B$  заданной размерности  $[m \times n]$  одним из изученных способов (*Листинг 28, Листинг 29*) в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 7*).

5. Задать вектор  $\vec{x}$  и матрицу  $C$  требуемой размерности и произвести с ними описанные в индивидуальном задании вычисления. Результаты продемонстрировать преподавателю.

6. Выполнить над заданной матрицей  $B$  действия, заданные в шестом столбце таблицы индивидуального задания (*Таблица 7*), сводящиеся к объединению матриц и выделению подматриц, строк и столбцов.

7. Произвести над элементами матрицы  $D$  расчеты, заданные в седьмом столбце таблицы индивидуального задания (*Таблица 7*).

8. При выполнении операций матричной алгебры размерности векторов и матриц задавать таким образом, чтобы была возможность требуемые операции производить. Организовать проверку корректности размерностей матриц при помощи функций *rows* и *cols*: при произведении – проверять *согласованность* матриц, при сложении – совпадение размерностей.

9. Матрицы-результаты сохранить в текстовых файлах (*Рис. 17*).

10. Доказать свойство некоммутативности матричного произведения – составить свои матрицы  $P$  и  $Q$  так, чтобы  $P \times Q = Q \times P$ , изменить матрицы так, чтобы  $P \times Q \neq Q \times P$ .

11. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

**Контрольные вопросы**

1. Как вы понимаете понятие матрица? Вектор?
2. Как понятие вектор  $n$ -мерного пространства связано со школьным понятием вектора (направленного отрезка)?
3. Что такое вектор-строка и вектор-столбец матрицы?
4. Что такое транспонирование матрицы?
5. Является ли матричное произведение коммутативным? А для квадратных матриц?
6. Как вычислить определитель матрицы?
7. Как задать матрицу (вектор) в MathCAD? Различаются ли эти понятия?
8. Что такое линейные операции с матрицами, векторами?
9. Какие операции над строками (столбцами) матрицы называются «эквивалентные преобразования»? Почему?
10. Как вычислить определитель матрицы разложением по строке (столбцу)?
11. Как с помощью средств MathCAD выделить нужный столбец матрицы?
12. Какие операции с матрицами можно производить?
13. Что такое обратная матрица? Когда она существует?
14. Что такое линейная комбинация векторов?
15. Как с помощью средств MathCAD выделить нужную строку матрицы?
16. Что такое обратная матрица? Как это понятие связано с обратным числом?
17. Как выделить требуемый фрагмент (подматрицу) заданной матрицы в MathCAD?
18. Как выглядит матричная единица? Матричный ноль?
19. Как изменяется определитель матрицы при эквивалентных преобразованиях строк, столбцов матрицы?
20. Как вычислить обратную матрицу через алгебраические дополнения?
21. Какие векторы называются линейно зависимыми? Дайте строгое определение.
22. Что такое определитель матрицы?
23. Какая матрица называется диагональной? Треугольной?
24. Какие матрицы можно перемножать?
25. Какие векторы называются линейно независимыми? Дайте строгое определение.
26. Как величина определителя связано с числом линейно независимых строк (столбцов) квадратной матрицы?
27. Что такое ранг матрицы? Как значение ранга связано с определителем?
28. Как связано существование обратной матрицы и величина определителя?
29. Как изменяется определитель матрицы при ее умножении на число?
30. Что такое ранг матрицы? Как его рассчитать? Как он вычисляется в MathCAD?

## 6. ВЕКТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### 6.1. Операции с векторами

Математическое представление о векторе как о координатном наборе из  $n$  чисел, позволяет использовать его для описания физических явлений природы, обладающих *направленностью и величиной*. Таких как перемещение, скорость и ускорение, характеристики гравитационных, магнитных и электрических полей, ток и напряжение электрических схем и др.

**Базис и координаты.** Тройка  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  линейно независимых векторов в пространстве  $\square^3$  называется *базисом*. Любой вектор  $\bar{x}$  может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть, представлен в виде

$$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3. \quad (5)$$

Числа  $(x_1, x_2, x_3)$  в разложении (5) называются *координатами вектора  $\bar{x}$*  в базисе  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ .

**Ортонормированный базис.** Если векторы  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  – прямоугольными. Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .

В векторной геометрии определены три вида произведений векторов – это скалярное произведение, векторное и смешанное:

**Скалярное произведение** – это операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и характеризующее длины векторов-сомножителей и угол между ними. Данной операции соответствует умножение длины вектора  $\bar{x}$  на проекцию вектора  $\bar{y}$  на вектор  $\bar{x}$ . Скалярное произведение может быть вычислено по следующим формулам:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos(\angle \bar{x}\bar{y}) \quad (6)$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 \quad (7)$$

Соотнесение формул (6) и (7) позволяет легко вычислить угол  $\angle \bar{x}\bar{y}$  между векторами.

Через скалярное произведение определяется *длина вектора*, под которой обычно понимается его *модуль* или *абсолютное значение*:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (8)$$

**Векторным произведением** вектора  $\bar{x}$  на вектор  $\bar{y}$  называется вектор  $\bar{x} \times \bar{y}$ , удовлетворяющий следующим требованиям:

- длина вектора  $|\bar{x} \times \bar{y}|$  равна произведению длин векторов  $|\bar{x}|$  и  $|\bar{y}|$  на синус угла между ними:

$$|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \sin(\angle \bar{x}\bar{y}); \quad (9)$$

- вектор  $\bar{x} \times \bar{y}$  ортогонален каждому из векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ;
- вектор  $\bar{x} \times \bar{y}$  направлен так, что тройка векторов  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} \times \bar{y}$  является правой (Рис. 18).

Векторное произведение рассчитывается так (как определитель записанной ниже матрицы, составленной из базисных ортонормированных векторов  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  и координат векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ):

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (10)$$

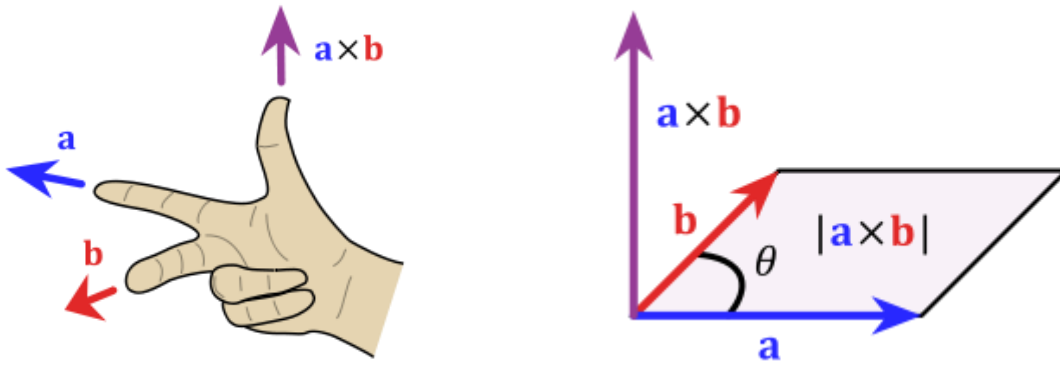


Рис. 18 – Результат векторного произведения направлен так, чтобы образовывать правую тройку векторов

**Смешанным произведением** трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное скалярному произведению вектора  $\vec{a} \times \vec{b}$  на вектор  $\vec{c}$ :  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ .  
Иначе произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  может быть задано так:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Смешанное произведение помимо линейности обладает следующими свойствами:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Три вектора, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными* (или иначе говоря – *линейно зависимыми*) тогда и только тогда, когда  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ . Следует из (11).

Тройка векторов является *правой* (Рис. 18) тогда и только тогда, когда  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ .

Если же  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$ , то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют левую тройку векторов.

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование – это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

## 6.2. Линейная зависимость (независимость) векторов

Важную роль в математике играет понятие линейной зависимости векторов. *Линейная зависимость* – это возможность выразить один вектор через другие вектора. Говорят, что вектор  $\vec{z}$  является линейной комбинацией других векторов, например  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , если существуют такие числа  $a$  и  $b$ , что  $\vec{z} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$ . Вектор  $\vec{z}$  может быть выражен через  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .

Если теперь из линейно зависимых векторов  $\vec{z}$ ,  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  составить матрицу  $A$ , то *определитель* этой матрицы будет равен нулю, а ее *ранг* – будет равен двум. Понятие ранга матрицы и его свойства рассматриваются в курсе математики, для нас важно понимать, что *ранг* – это количество линейно независимых векторов матрицы. Здесь можно рассматривать матрицу как набор из трех векторов-строк или трех векторов-столбцов.

Листинг 32. Определитель и ранг матрицы, состоящей из ЛЗС векторов

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A := \text{augment}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ |A| = 0 \quad \text{rank}(A) = 2 \end{array}$$



В примере (Листинг 33) матрица  $A$  составляется из линейно-зависимых векторов  $v1$ ,  $v2$  и  $v3$ , что определяет величину 2 ранга матрицы. И равенство нулю ее определителя.

Функция  $rref()$  в данном примере служит для приведения матрицы к треугольной форме. Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице  $rref(A)$  третья строка нулевая.

В листинге ниже доказывается, что вектор-столбец  $v3$  является линейной комбинацией векторов  $v1$  и  $v2$ . Здесь подобраны коэффициенты ( $a = -1$ ,  $b = 2$ ) линейного разложения вектора  $v3$  через векторы  $v1$  и  $v2$ .

Листинг 33. Построение линейной комбинации векторов-столбцов матрицы  $A$

$$\begin{array}{l}
 A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad |A| = 0 \quad \text{rank}(A) = 2 \quad rref(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 v1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad v3 := \frac{1}{3} \cdot v1 + \frac{4}{3} \cdot v2 \quad v3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице  $rref(A)$  третья строка нулевая (см. Листинг 32). Это значит, что и среди строк  $s1$ ,  $s2$  и  $s3$  имеется одна – являющаяся линейной комбинацией двух других.

Листинг 34. Построение линейной комбинации векторов-строк матрицы  $A$

$$\begin{array}{l}
 A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad |A| = 0 \quad \text{rank}(A) = 2 \quad rref(A^T) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 s1 := (1 \ 2 \ 3) \quad s2 := (4 \ -1 \ 0) \quad s3 := 3 \cdot s1 - 1 \cdot s2 \quad s3 = (-1 \ 7 \ 9)
 \end{array}$$

В этом листинге рассчитаны коэффициенты ( $a = 0.5$  и  $b = 0.5$ ) линейного разложения вектора-строки  $s2$  через векторы-строки  $s1$  и  $s3$ .

### 6.3. Собственный вектор и собственное значение

Особое значение в алгебре имеет представление о матрице как о некотором **линейном преобразовании** (функции) над векторами. Действительно, умножение матрицы на вектор в результате дает некоторый новый вектор, т.е. матрица как бы преобразует вектор. На изучении свойств таких преобразований базируется вся компьютерная графика, часть теории дифференциальных уравнений и все операционное исчисление. Здесь мы лишь коснемся двух базовых понятий теории линейных пространств – **собственный вектор** и **собственное число** матрицы (линейного преобразования).

**Собственный вектор**  $\bar{x}$  – это вектор, умножение матрицы  $A$  на который даёт тот же самый вектор, умноженный на некоторое скалярное число  $\lambda$ , называемое **собственным числом** матрицы:

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}. \tag{12}$$

Понятия собственного вектора и собственного числа являются одними из ключевых в линейной алгебре, на их основе строится множество конструкций. Множество всех собственных векторов линейного преобразования называется **собственным подпространством**, множество всех собственных значений матрицы или линейного преобразования – **спектром матрицы** или преобразования.

В *MathCAD* существуют функции  $eigenvals()$  и  $eigenvec()$  для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы (12), кроме того имеется функция  $eigenvecs()$  для получения всех собственных векторов сразу.

В примере, приведенном ниже (*Листинг 35*) для матрица  $A$ , заданной произвольно, рассчитываются собственные числа при помощи функции  $eigenvals()$ . В нашем случае – два из них комплексно-сопряженные, а одно – вещественное. Затем для них строятся собственные векторы  $eigenvec()$  и  $eigenvecs()$ , после чего производится проверка правильности вычисления собственных значений и векторов по формуле (12).

*Листинг 35. Собственные вектора и собственные значения матрицы*

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} & |A| &= 9 & c := eigenvals(A) & eigenvals(A) = \begin{pmatrix} 0.718 + 2.289i \\ 0.718 - 2.289i \\ 1.564 \end{pmatrix} \\
 v0 := eigenvec(A, c_0) & v0 = \begin{pmatrix} -0.227 - 0.231i \\ 0.331 - 0.566i \\ -0.07 + 0.679i \end{pmatrix} & v2 := eigenvec(A, c_2) & v2 = \begin{pmatrix} 0.421 \\ -0.308 \\ 0.853 \end{pmatrix} \\
 eigenvecs(A) &= \begin{pmatrix} -0.206 + 0.249i & -0.206 - 0.249i & 0.421 \\ -0.597 - 0.271i & -0.597 + 0.271i & -0.308 \\ 0.682 & 0.682 & 0.853 \end{pmatrix} \\
 \text{Проверка:} & \\
 A \cdot v1 &= \begin{pmatrix} 0.366 + 0.684i \\ 1.533 - 0.351i \\ -1.603 - 0.327i \end{pmatrix} & c_1 \cdot v1 &= \begin{pmatrix} 0.366 + 0.684i \\ 1.533 - 0.351i \\ -1.603 - 0.327i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

#### 6.4. Практическая работа № 4 Операции с векторами

Продолжительность – 2 часа.

##### Цель работы

Освоение умений, навыков и компетенций работы с векторами в *MathCAD*. Закрепление знаний, полученных в курсе «Высшая математика» в разделах «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Векторный анализ».

Получение компетенций, позволяющих представлять взаимное расположение векторов, определять их величину, линейную зависимость и независимость, выполнять операции с векторами. Строить матричные преобразования векторов, вычислять собственные вектора и собственные числа матриц.

##### Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD* и произвести перечисленные ниже исследования в соответствии со своим вариантом индивидуального задания (*Таблица 8, Приложение 4*).

2. Задать в трехмерном пространстве два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (*Таблица 8*). Вычислить их длины вручную, по формуле (8) и с помощью средств *MathCAD*.

3. Построить их сумму, разность; скалярное, векторное произведение. Описать их взаимное расположение. Вычислить угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

4. Построить собственные значения и собственные вектора матрицы  $A$  (*Таблица 8*). Проверить, что они найдены верно (*Листинг 35*). Построить треугольную матрицу, эквивалентную заданной матрице  $A$ .

5. Задать матрицу  $B$  из случайных элементов, состоящую из линейно-зависимых векторов-строк или векторов-столбцов, вычислить определитель и ранг матрицы  $B$  (*Листинг 32*). Построить треугольную матрицу, эквивалентную заданной матрице  $B$ .

6. Построить линейные комбинации одной из строк матрицы  $\mathbf{B}$  (Листинг 33) и одного из столбцов матрицы  $\mathbf{B}$  (Листинг 34).
7. Матрицы и векторы результатов сохранить в текстовых файлах (Рис. 17).
8. Составить отчет.

**Контрольные вопросы**

1. Как понятие вектор  $n$ -мерного пространства связано со школьным понятием вектора (направленного отрезка)?
2. Что такое линейная комбинация векторов?
3. Дайте определение скалярного произведения векторов. Опишите его свойства.
4. Какие векторы называются линейно зависимыми? Дайте строгое определение.
5. Дайте определение векторного произведения векторов. Опишите его свойства.
6. Как определить число линейно независимых векторов в системе?
7. Что такое смешанное произведение векторов?
8. Какие векторы называются собственными векторами матрицы? Что такое собственные числа матрицы?
9. Какие векторы называются линейно независимыми? Дайте строгое определение.
10. Что такое базис? Ортонормированный базис?
11. Какая система векторов может считаться базисом?
12. Как вы понимаете понятие линейный оператор? Как это понятие связано с матрицей?

## 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и матрицы весьма тесно связаны. Матричная алгебра возникла в связи развитием методов решения линейных уравнений (алгебраических, дифференциальных) и отражает основные законы преобразования систем таких уравнений. Система линейных алгебраических уравнений в матричной форме выглядит так:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 = b_1; \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{2,3} \cdot x_3 = b_2; \\ a_{3,1} \cdot x_1 + a_{3,2} \cdot x_2 + a_{3,3} \cdot x_3 = b_3; \end{cases} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица с  $m$  строками и  $n$  столбцами с известными элементами;  $\mathbf{x}$  – вектор искомых решений размера  $n$ ;  $\mathbf{b}$  – вектор правых частей с известными элементами размера  $m$ .

В разделе матричной алгебры курса «Высшая математика» рассматривается вопрос о том, когда система вида (13) имеет решение. Здесь мы не будем разбирать его подробно, отметим лишь самое главное:

1. Система (13) имеет единственное решение, если все строки матрицы $\mathbf{A}$ являются линейно-независимыми, т.е. если $m=n=\text{rank}(\mathbf{A})$ или иначе если $ \mathbf{A}  \neq 0$ . (14)
2. Система имеет бесконечное число решений, если некоторое число строк расширенной матрицы $\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ являются линейно-независимыми, т.е. если $n=m$ и $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b}))$ , но $n=m > \text{rank}(\mathbf{A})$ . (15)
3. Система не имеет решений, если число линейно независимых строк матрицы $\mathbf{A}$ и расширенной матрицы $\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не совпадают, т.е. $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq \text{rank}(\text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b}))$ . (16)

Если матрица  $\mathbf{A}$  квадратная ( $n=m$ ) и невырождена, то  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$  — единственное решение (14). Можно найти его непосредственно при помощи умножения слева на обратную матрицу, а можно при помощи функции *lsolve*.

### Листинг 36. СЛАУ непосредственный поиск решения. Функция *lsolve*

Матрица системы:	Матрица правой части:	Вычисление определителя
$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	$ \mathbf{A}  = 5$
Вычисление решения системы	Решение системы с помощью функции <i>lsolve</i>	Проверка правильности решения
$\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{x} := \text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

### 7.1. Метод Гаусса

Системы линейных алгебраических уравнений (13) встречались обучаемому еще в курсе средней школы. Там для решения подобных систем использовался метод последовательного выражения неизвестных  $x_i$ ,  $i = 1..n$  и подстановки полученного равенства в оставшиеся уравнения.

Этот метод в математике называется методом Гаусса, и в матричном виде сводится к эквивалентному домножению на константу и суммированию строк (но не столбцов) расширенной матрицы  $\mathbf{Ab} = \text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с целью приведения ее к

ступенчатому виду – как матрица **Ag** на листинге (Листинг 37). Крайний правый столбец матрицы **Ag** – решение.

Листинг 37. Метод Гаусса. Функция *rref*

ORIGIN := 1		
Матрица системы:	Матрица правой части:	Формирование расширенной матрицы системы:
$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$	$Ab := \text{augment}(A, b) \quad Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$
Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса):		
$Ag := \text{rref}(Ab) \quad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Формирование столбца решения системы:	Проверка решения:
	$x := \text{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Команда **ORIGIN:=1** переопределяет принцип нумерации элементов матриц – теперь они нумеруются не с 0, а с 1.

Метод Гаусса можно реализовать вручную преобразуя строки матрицы, а можно использовать встроенную функцию *rref*, как показано на примере. Можно доказать, что полученная матрица **Ag** эквивалентна матрице **Ab** и описывает одну и ту же исходную систему линейных алгебраических уравнений.

## 7.2. Правило Крамера

Еще один широко известный способ построения решения системы (13) – правило Крамера (Листинг 38). Этот метод состоит в последовательном построении вспомогательных матриц **A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>**, ... **A<sub>n</sub>** путем замены *i*-того столбца матрицы вектором правых частей **b** и вычисления неизвестных переменных  $x_i, i = 1..n$  как отношение определителей матриц **A<sub>i</sub>** и **A**.

Листинг 38. правило Крамера

ORIGIN := 1 нумерация элементов матриц не с 0, а с 1			
$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$ A  = 2$	$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$B := A \cdot X \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$
Заменить соответствующий столбец вектором B правых частей			
$A1 := \text{augment}(B, A^{(2)}, A^{(3)})$	$A2 := \text{augment}(A^{(1)}, B, A^{(3)})$	$A3 := \text{augment}(A^{(1)}, A^{(2)}, B)$	
$A1 = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad  A1  = 2$	$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad  A2  = 8$	$A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad  A3  = 4$	
Вектор X - решение СЛАУ		Проверка:	
$X := \begin{pmatrix} \frac{ A1 }{ A } & \frac{ A2 }{ A } & \frac{ A3 }{ A } \end{pmatrix}^T \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$		$A \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$	

Разумеется, корни системы уравнений (13) можно отыскать известными нам из предыдущих занятий операторами *Given-Find* и *Given-Minerr*.

## 7.3. СЛАУ вырожденный случай

Главным критерием существования решения СЛАУ является *ранг* матрицы. В примерах, рассмотренных выше *Листинг 36 - Листинг 38*, ранг основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы – самый простой тип СЛАУ, для которого *существует единственное решение* (14). Это объясняется тем, что количество линейно-независимых уравнений системы (13) равняется количеству неизвестных.

Если в СЛАУ количество уравнений больше числа неизвестных, ясно, что такая система избыточна. И может быть противоречивой, в этом случае решения у системы может и не быть. Вопрос о существовании решения в этом случае сводится к поиску непротиворечивого подмножества всех уравнений – такого, для которого ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен числу неизвестных (15).

В этом случае множество решений строится следующим образом. Поскольку количество уравнений  $m$  меньше числа неизвестных  $n$  ( $n > m$ ), нам необходимо выбрать  $m$  *зависимых переменных* (обозначим их вектором  $\mathbf{x}_1$ ) и выразить их через оставшиеся  $(n-m)$  переменных – *свободные переменные* (обозначим их вектором  $\mathbf{x}_2$ ). Это возможно, если матрица  $\mathbf{A}$  имеет  $m$  независимых строк, иными словами ни одно из уравнений не является линейной комбинацией других. Систему уравнений можно преобразовать к виду:

$$\mathbf{A}_1 \times \bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}_2 \times \bar{\mathbf{x}}_2, \quad (17)$$

где  $\mathbf{A}_1$  — квадратная матрица  $m \times m$ , состоящая из коэффициентов при компонентах вектора  $\mathbf{x}_1$ , а  $\mathbf{A}_2$  — матрица, содержащая  $m$  строк и  $(n-m)$  столбцов, образованная коэффициентами при компонентах вектора  $\mathbf{x}_2$ .

Ясно, что решение такой системы будет представлять собой некоторую матричную функцию от свободных переменных  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_2)$ , которую можно записать таким образом:  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}(\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}_2 \times \bar{\mathbf{x}}_2)$ . Реализация таких вычислений сводится к компоновке матриц  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  из столбцов исходной матрицы  $\mathbf{A}$  и взятию обратной матрицы  $\mathbf{A}_1^{-1}$ , выполнение этих действий в среде *MathCAD* не составляет проблем.

Пример ниже (*Листинг 39*) иллюстрирует неоднозначность решений СЛАУ вида (17) в зависимости от того, как задана свободная переменная. Можно видеть, что разные методы решения – *lsolve*, *Given-Find* и *rref* выдают различные результаты. В связи с этим, к поиску решения СЛАУ нельзя подходить «бездумно», *MathCAD* – это всего лишь инструмент, он помогает в изучении математики, но не заменяет её.

Листинг 39. Бесконечное множество решений СЛАУ

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 0 \quad \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$$

This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$\mathbf{AB} := \text{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathbf{AB}) = 2$$

$$\text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} + \text{subscript}(\text{subscript}(\_t, 1), 1) \\ \frac{2}{3} - 2 \cdot \text{subscript}(\text{subscript}(\_t, 1), 1) \\ \text{subscript}(\text{subscript}(\_t, 1), 1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} -0.233333 \\ 0.466666 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Given } A \cdot X = B \quad X := \text{Find}(X) \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(AB) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В приведенном выше примере функция *Isolve* возвращает символьные зависимости, показывающие, что решение может быть выражено через параметр  $t_1$ . А функция *rref* возвращает матрицу, эквивалентную  $A$ , последняя строка которой состоит из нулей. Запишем, какой системе уравнений соответствует матрица *rref*(AB):

$$\begin{cases} x - z = -\frac{1}{3}, \\ y + 2z = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + z, \\ y = \frac{2}{3} - 2z. \end{cases}$$

Теперь понятно, почему переменная  $z$  называется *свободной переменной*, а  $x$  и  $y$  – *зависимыми*. Здесь переменные  $x$  и  $y$  – могут быть выражены через  $z$ , и в зависимости от неё будут принимать различные значения:

*Листинг 40. Бесконечное множество решений СЛАУ*

$$X(z) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + z \\ \frac{2}{3} - 2z \\ z \end{pmatrix} \quad X(0.1) = \begin{pmatrix} -0.233 \\ 0.467 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad A \cdot X(0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad A \cdot X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**7.4. Практическая работа №5. Системы линейных алгебраических уравнений**

Продолжительность – 4 часа.

**Цель работы**

Закрепление умений, навыков и компетенций работы с матрицами и векторами в *MathCAD*. Закрепление знаний, полученных в курсе «Высшая математика» в разделах «Линейная алгебра», посвященных поиску решений СЛАУ. Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

**Задание на практическую работу**

1. В соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 9, Приложение 5*) определить существование и единственность решения заданной системы.

2. Создать программу в среде *MathCAD* и найти решение заданной СЛАУ четырьмя способами:

- 1.1. по методу Гаусса при помощи встроенной функции *rref*( );
- 1.2. по правилу Крамера;
- 1.3. непосредственно умножением на обратную матрицу;
- 1.4. при помощи встроенных функций *MathCAD*.

3. Сравнить решения, найденные разными способами.

4. Для индивидуальных заданий (*Таблица 10, Приложение 5*) найти определитель, ранг основной и расширенной матриц и их размерности и объяснить условия существования решения.

5. В случае, если решение существует, обосновать разделение вектора неизвестных на *зависимые* и *свободные переменные*.

6. Выписать общее решение вида (17) и построить не менее трех частных решений, при фиксированных свободных переменных.

7. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями.

**Контрольные вопросы**

1. Как определить, разрешима ли система алгебраических уравнений?
2. Если система имеет решения, то как определить, сколько их?
3. Как отделить зависимые переменные от свободных? Сколько их?
4. Что такое расширенная матрица системы?
5. Что такое ранг СЛАУ? Чем он отличается от ранга матрицы СЛАУ?
6. В чем смысл метода Гаусса решения СЛАУ?
7. Как решить СЛАУ по методу Крамера? Можно ли решить вырожденную систему?
8. Какие методы поиска решений СЛАУ вам известны?
9. Как решить СЛАУ, если определитель матрицы равен 0?



## 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

### 8.1. Теория чисел. Краткий обзор.

Развитие цивилизации требует развития абстрактных научных взглядов на объекты природы, в первую очередь это относится к математике. Развитие теории чисел определяется теми операциями, которые необходимо производить с числами.

На заре человечества требовалось лишь операция «счет» для которого было достаточно натуральных чисел  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Натуральные числа можно было только складывать, однако, появление операции «вычитание» определило множество целых чисел  $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ . Для целых чисел применимы операции «умножения», «деления нацело» и «остаток от деления». Появление операции «дробь» или «деление» обусловило появление множества рациональных чисел  $\{a/b, \text{ где } a, b - \text{целые числа}\}$ . Рациональные числа можно умножать, делить и возводить в степень, но извлекать корень – нельзя. Операция «извлечение корня из положительного числа» определила множество иррациональных (или действительных) чисел  $\{-\infty, +\infty\}$ , изображаемых обычно в виде числовой прямой.

Ясно, что каждое последующее числовое множество включает в себя все предыдущие. Но как же быть с корнем из отрицательного числа? Придется построить очередное расширение множества вещественных чисел, но в математике существует строгая теорема, доказывающая, что никаких других чисел кроме действительных на числовой прямой нет.

Подойдем с другой стороны. Понятно, что  $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$  и понятно, что любой корень из отрицательного числа может быть представлен в виде произведения некоторого действительного числа на  $\sqrt{-1}$ . Таким образом, корни из положительных и корни из отрицательных чисел могут быть получены друг из друга умножением на  $\sqrt{-1}$ , но при этом не смешиваются. Ясно, что определив  $\sqrt{-1}$  мы сможем расширить множество чисел до множества комплексных чисел.

### 8.2. Комплексные числа

**Комплексным числом** называется число вида  $z = x + i \cdot y$ , где  $x = \text{Re}(z)$  и  $y = \text{Im}(z)$  – вещественные числа, а  $i$  – мнимая единица, определяемая равенством  $i^2 = -1$  или  $i = \sqrt{-1}$ . Геометрическая интерпретация комплексного числа очевидна – каждому комплексному числу  $z$  соответствует точка на комплексной плоскости с координатами  $(x, y)$ . Ось абсцисс называется действительной осью, ось ординат – мнимой.

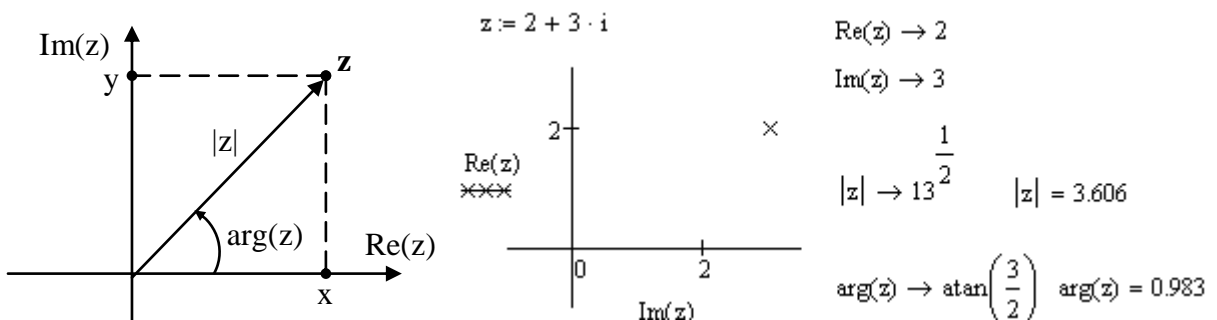


Рис. 19 – Представление комплексного числа в MathCAD

При вводе комплексных чисел в программе на MathCAD для ввода комплексной единицы необходимо всегда набирать **1i** или **1j**, в противном случае MathCAD

истолкует  $i$  или  $j$  как переменную. Когда курсор покидает выражение, содержащее  $1i$  или  $1j$ , MathCAD скрывает невидимую 1 и оставляет только  $i$ .

Понятно, что любую точку на плоскости можно записать в *декартовых*  $(x, y)$  координатах или в *полярных*  $(\rho, \varphi)$ . Расстояние  $\rho$  от точки  $z$  до начала координат называется *модулем числа*  $z$  и обозначается  $|z|$ . Угол  $\varphi$  между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки  $z$  называется *аргументом числа*  $z$  и обозначается  $\arg(z)$ . По определению,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = y/x \quad (18)$$

Если радиус-вектор числа  $z$  совершит полное число оборотов вокруг начала координат, то он совпадает с первоначальным положением, а угол  $\varphi$  увеличится на число кратное  $2\pi$ . Совокупность всех этих углов называется *полным значением аргумента* и обозначается

$$\operatorname{Arg}(z) = \varphi + 2k\pi, \quad k - \text{целое}. \quad (19)$$

Из множества значений аргумента особо выделяется *главное значение аргумента*  $\arg(z)$ , удовлетворяющее неравенству  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ , при этом:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (20)$$

### Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Кроме алгебраической формы  $z = x + iy$  часто используют *тригонометрическую форму* записи того же самого комплексного числа (здесь  $\varphi = \arg(z)$ ):

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)). \quad (21)$$

Пользуясь формулой Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ , можно получить *показательную форму* любого комплексного числа, кроме  $z = 0 + i \cdot 0$ :

$$z = |z| e^{i\varphi}. \quad (22)$$

Нужно отдавать себе отчет, что классическое *декартовое представление* комплексного числа  $z = x + i \cdot y$ , *тригонометрическая форма* (21) и *показательная форма* (22) определяют **одно и то же комплексное число!**

*Рис. 20* иллюстрирует возможность перехода между этими тремя формами записи одного и того же числа.

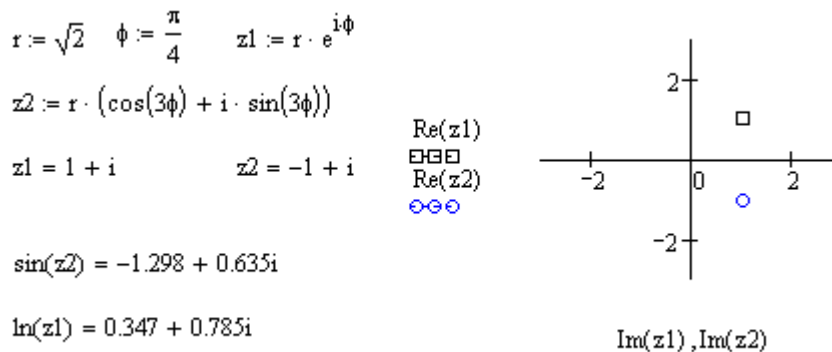


Рис. 20 – Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

### 8.3. Операции над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  осуществляются по формулам  $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ . Умножение, деление и возведение в степень удобнее производить в показательной форме. Пусть  $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$ , тогда произведение и частное:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad z_1 / z_2 = |z_1| / |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (23)$$

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (y_2 x_1 + y_1 x_2)$$

$$\frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

С помощью формулы Муавра  $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$  можно получить формулу для степени числа:

$$z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad (24)$$

Корень  $n$ -ной степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ):

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} (\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})). \quad (25)$$

Геометрически эти  $n$  значений корня изображаются вершинами правильного  $n$ -угольника с полярными координатами  $(\sqrt[n]{|z|}, \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n})$ , (см. Рис. 23).

$z1 := 2 + 3 \cdot i$	$z2 := 3 + 2 \cdot i$	
$z1 + z2 \rightarrow 5 + 5 \cdot i$	$\arg(z1 + z2) = 0.785$	$ z1 + z2  = 7.071$
$z1 - z2 \rightarrow -1 + i$	$\arg(z1 - z2) = 2.356$	$ z1 - z2  = 1.414$
$z1 \cdot z2 \rightarrow 13 \cdot i$	$\arg(z1 \cdot z2) = 1.571$	$ z1 \cdot z2  = 13$
$\frac{z1}{z2} \rightarrow \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot i$	$\arg\left(\frac{z1}{z2}\right) = 0.395$	$\left \frac{z1}{z2}\right  = 1$

Рис. 21 – Операции над комплексными числами

### 8.4. Понятие комплексных функций

С точки зрения *MathCAD* нет разницы между вычислением вещественнозначной или комплексной функции. Трудности состоят в том, что обычный человек не может визуально представить себе функцию размерности больше 3, а комплексные функции отображают точку из двумерной комплексной плоскости в двумерную комплексную плоскость, т.е. четырехмерное изображение. Поэтому при работе с комплексными функциями пользуются аналитическими или табличными представлениями функций, но не графиками.

На рисунке (Рис. 22) схематично изображено множество  $B$ , называемое *образом множества  $A$  при воздействии на все его точки функцией  $\psi(z) \rightarrow w, z \in A, B = \psi(A)$* . Множество  $A$  называется *прообразом* множества  $B$ . От функции  $\psi(z)$ .

По виду результирующего множества  $\psi(A) = B$ , (образа множества  $A$ ) можно догадываться о поведении функции  $\psi$  и о ее свойствах (см. Рис. 22).

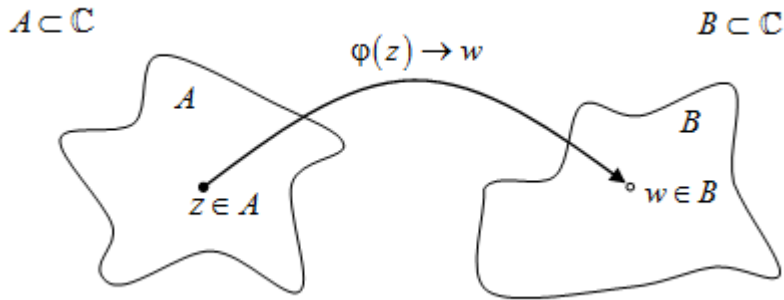


Рис. 22 – Представление комплексных функций

Комплексная переменная  $w = \psi(z) = u(z) + i \cdot v(z)$  называется *функцией комплексной переменной*  $z = x + i \cdot y$ , если каждому значению  $z$  из комплексной плоскости соответствует одно или несколько значений  $w$ . Здесь  $u(z) = u(x, y)$  – вещественная и  $v(z) = v(x, y)$  – мнимая части функции  $w = \psi(z)$ .

**Многозначные функции**

При использовании в комплексной области многие функции, о которых мы привыкли думать как о возвращающих одно значение, становятся *многозначными*, как, например в (25) для функции «корень  $n$ -ной степени из комплексного числа».

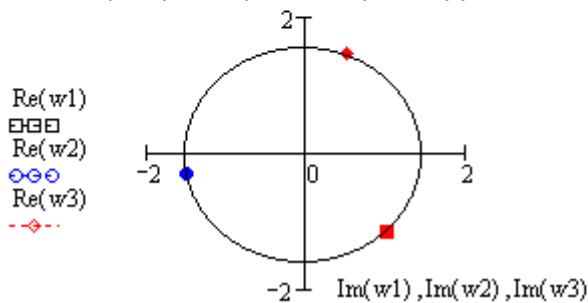
Общее правило состоит в том, что для многозначной функции *MathCAD* всегда возвращает значение, составляющее на комплексной плоскости самый маленький положительный угол с положительным направлением действительной оси. Оно называется *главным значением аргумента*. Единственное исключение из этого правила – оператор корня  $n$ -ной степени, описанный в (25) – этот оператор возвращает вещественный корень всякий раз, когда это возможно.

Например, если требуется вычислить  $\sqrt[3]{-1}$ , *MathCAD* вернёт  $-1$ , хотя кубическим корнем из  $-1$ , кроме того, являются числа  $0.5 + 0.866i$  и  $0.5 - 0.866i$ , что можно проверить, возведя эти числа в куб.

корень из комплексного числа - многозначная функция

$z := 2 + 3 \cdot i$      $r := |z|$      $r = 3.606$      $\phi := \arg(z)$      $\phi = 0.983$

$w_1 := \sqrt[3]{r} \cdot \left( \cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right) \right)$	$w_1 = -1.153 + 1.011i$	$w_1^3 = 2 + 3i$
$w_2 := \sqrt[3]{r} \cdot \left( \cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) \right)$	$w_2 = -0.299 - 1.504i$	$w_2^3 = 2 + 3i$
$w_3 := \sqrt[3]{r} \cdot \left( \cos\left(\frac{\phi + 6\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 6\pi}{3}\right) \right)$	$w_3 = 1.452 + 0.493i$	$w_3^3 = 2 + 3i$



$k := 1..3$

$$\sqrt[3]{r} \cdot e^{i \frac{\phi + 2k\pi}{3}} =$$

$-1.153 + 1.011i$
$-0.299 - 1.504i$
$1.452 + 0.493i$

Рис. 23 – Пример многозначной функции

Рассмотрим свойства некоторых элементарных функций комплексной переменной.

### Линейная функция

$w(z) = a \cdot z + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные комплексные числа. Это отображение преобразует прямые в прямые (углы между прямыми сохраняются) и окружности в окружности.

### Дробно-линейная функция

$w(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ , где  $a, b, c$  и  $d$  – постоянные комплексные числа. Это отображение преобразует окружность или прямую в окружность или прямую. Внутренняя область отображаемой окружности переходит во внутреннюю или во внешнюю область образа. Частный случай этой функции ( $a=d=0, b=c=1$ ) – функция  $w(z) = 1/z$ , называется *инверсией*.

### Экспонента

Экспоненциальная функция  $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) - i \cdot \sin(y))$  обладает следующими свойствами:  $|e^z| = e^x$ ,  $\arg(e^z) = y$ . Линии  $x = const$  преобразуются в окружности  $|w| = const$ , а линии  $y = const$  – в лучи  $\arg(w) = const$ .

### Тригонометрические и гиперболические функции

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \operatorname{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)},$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh}(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{th}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)}, \quad \operatorname{cth}(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)}{\operatorname{sh}(z)}.$$

### Логарифмическая функция

$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot (\arg(z) + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  определяется как обратная к экспоненциальной, бесконечнозначная функция. Дополнительно принимается, что  $\operatorname{Ln}(0) = \infty$ , и  $\operatorname{Ln}(\infty) = \infty$ .

Значение логарифма при  $k=0$  называется главным значением логарифма и обозначается  $\ln(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$ . Поэтому  $\operatorname{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i$ .

### Обратные гиперболические и тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin}(z) = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos}(z) = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \quad \operatorname{Arctg}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{Arcctg}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}, \quad \operatorname{Arsh}(z) = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \quad \operatorname{Arch}(z) = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arth}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{Arcth}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

### Степенная и показательная функции

Если  $\alpha$  и  $\beta$  – два комплексных числа,  $\alpha \neq 0$ , то степенная функция  $w(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$  в силу основного логарифмического тождества

$$\alpha^\beta = e^{\beta \cdot \operatorname{Ln}(\alpha)} = e^{\beta \cdot (\ln \alpha + 2k\pi i)}.$$

Когда  $\beta$  – целое вещественное число, то степень имеет одно значение, т.к.  $e^{2\beta k\pi i} = 1$ . Если  $\beta$  – несократимая рациональная дробь  $p/q$ ,  $q > 1$ , то степень имеет ровно  $q$  различных значений (25). Во всех других случаях степень имеет бесконечное множество значений.

### 8.5. Производная функции комплексного переменного

Если для функции  $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  существует конечный предел.

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ , то он называется производной от функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ .

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции  $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  являются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (26)$$

Если функция задана через свои вещественную и мнимую части  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , то после проверки условий (26) производную  $w'(z)$  можно найти по одной из равносильных формул:

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad w' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \text{ и } w' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (27)$$

Если же дана зависимость  $f(z)$ , то после выполнения проверки условий Коши-Римана (26) производную  $w(z) = df(z)/dz$  можно найти непосредственным дифференцированием по таблице производных (такой же, как и для функций вещественного аргумента).

Функция  $f(z)$  называется *аналитической* (или *голоморфной*) в точке  $z_0$ , если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности  $z_0$ .

#### Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

Кроме того, доказано, что вещественная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ и } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим обратную задачу: Дана действительная часть  $u(z) = u(x, y)$  некоторой неизвестной функции комплексной переменной  $w = f(z)$ . Требуется найти мнимую часть  $v(z) = v(x, y)$  этой функции. Найти тем самым саму функцию  $f(z)$ , используя некоторое начальное условие. Или наоборот – восстановить неизвестную  $u(x, y)$  по известной  $v(x, y)$ .

Эта задача решается исходя из (26) – (28).

### 8.6. Практическая работа №6. Комплексные вычисления

Продолжительность – 2 часа.

#### Цель работы

Освоить следующие умения, навыки, компетенции: представление о комплексном числе, комплексной функции, пространстве комплексных чисел. Умение вычислить вещественную и мнимую части аналитически и численно. Умение построить модуль и аргумент комплексного числа и функции. Умение записывать комплексное число в тригонометрической и показательной форме. Умение производить арифметические операции с элементами комплексного пространства. Умение оперировать с комплексными функциями.

#### Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде MathCAD. Задать два произвольных комплексных числа  $c1$  и  $c2$ , продемонстрировать операции сложения, умножения, деления комплексных чисел. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме. Построить все значения на графике в комплексной плоскости.

2. Вычислить все корни  $n$ -ной степени произвольного комплексного числа. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме. Построить все корни на графике в комплексной плоскости.

3. В соответствии с вариантом индивидуального задания (Таблица 11, Приложение 6), построить образ множества  $A$  при воздействии на него функцией  $w = \psi(z)$ . Построить на графике множества  $A$  и  $\psi(A)$  в комплексной плоскости. Для многозначных функций – построить все значения. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме.

4. Проверить функцию  $w = \psi(z)$  на аналитичность – выполняется ли для точек множества  $A$  условия Коши-Римана (26) и уравнения Лапласа (28).

5. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

### Контрольные вопросы

1. Как вычислить корень из отрицательного числа?
2. Как вы понимаете комплексное число? Как его представить / изобразить?
3. Как представляется комплексное число в декартовой и полярной системе координат?
4. Умеете ли вы строить модуль и аргумент комплексного числа?
5. Как извлечь корень из комплексного числа?
6. Сколько значений имеет корень пятой степени из 1? Нарисуйте их.
7. Как изучать комплексные функции?
8. Умеете ли вы записывать комплексное число  $4 + 3i$  в тригонометрической форме?
9. Как вычислить вещественную и мнимую части комплексного числа аналитически и численно? Возможно ли это без MathCAD?
10. Как записать комплексное число  $4 + 3i$  в показательной форме?
11. Какие арифметические операции с элементами комплексного пространства можно производить?
12. Что такое многозначная функция? Приведите пример.
13. Как выглядит пространство комплексных чисел?
14. Как удобнее всего возвести комплексное число в степень?

## 9. СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Ядро символьных вычислений MathCAD предназначено для аналитических преобразований математических выражений. Некоторые из этих возможностей MathCAD (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры Maple (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Начиная с 14 версии MathCAD использует символьное ядро MuPAD.

Символьные вычисления – это удобный инструмент, который существенно облегчает работу с математическими преобразованиями. Символьные вычисления позволяют упростить математическое выражение (Листинг 41), в то время как численные расчеты возвращают просто значение выражения в точке.

Листинг 41. Символьное упрощение выражения

$$f(x) := \sum_{k=0}^3 \left( \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot x^k \cdot 2^{3-k} \right) \quad \sum_{k=0}^3 \left( \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot x^k \cdot 2^{3-k} \right) \text{ simplify} \rightarrow 8 + 12 \cdot x + 6 \cdot x^2 + x^3$$

$f(3) = 125 \quad f(0) = 8$

Воспользоваться возможностями символьного ядра можно вызвав одну из функций символьных преобразований (Таблица 2) из инструментальной панели шаблонов «Symbolic» или вызвав одноименную вкладку главного меню (Рис. 24).

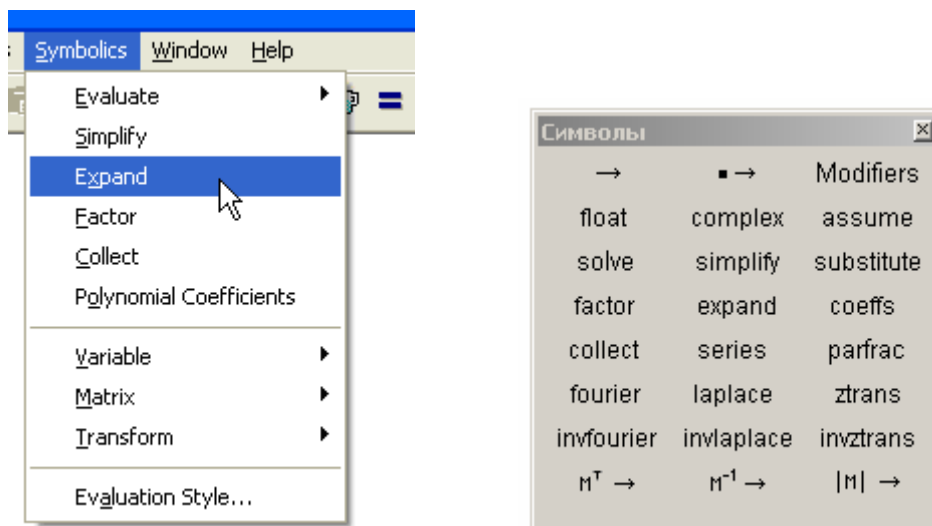


Рис. 24 – Вызов символьных преобразований MathCAD

Таблица 2. Функции символьных вычислений MathCAD

Функции	Выполняемые операции
<i>float</i>	Численное вычисление
<i>complex</i>	Комплексное вычисление
<i>assume</i>	Символьное вычисление с некоторыми предположениями
<i>solve</i>	Решение уравнения, неравенства, системы уравнений
<i>simplify</i>	Упрощение выражений
<i>substitute</i>	Замена переменной
<i>factor</i>	Разложение на множители
<i>expand</i>	Перемножение степеней и произведений
<i>coeffs</i>	Определение коэффициентов полинома
<i>collect</i>	Группировка слагаемых по степеням переменной
<i>series</i>	Разложение в ряд Тейлора или Лорана
<i>parfrac</i>	Разложение на элементарные дроби



<i>fourier</i>	Преобразование Фурье
<i>invfourier</i>	Обратное преобразование Фурье
<i>laplace</i>	Преобразование Лапласа
<i>invlaplace</i>	Обратное преобразование Лапласа
<i>ztrans</i>	Z-преобразование
<i>invztrans</i>	Обратное Z-преобразование

На самом деле, оператор индикации символьных значений  $\rightarrow$ , который мы активно использовали в предыдущих работах, тоже относится к символьным операторам и вызывает алгоритмы символьных вычислений (см. Листинг 42).

Многие задачи математического анализа, например, суммирование ряда, взятие производных, интегрирование, взятие несобственного интеграла и т.п. (см. Листинг 42) могут быть легко разрешены при помощи ядра символьных вычислений *MathCAD*.

Листинг 42. Оператор  $\rightarrow$  индикации символьных значений

$$\sum_{i=1}^n i^2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (n+1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \qquad \frac{d}{dt} \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 10 \cdot \cos\left(10 \cdot t + \frac{1}{4} \cdot \pi\right)$$

$$\int \ln(x) dx \rightarrow x \ln(x) - x \qquad \int_a^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \frac{1}{2 \cdot a^2} \qquad \int_a^b \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \frac{-1}{2 \cdot b^2} + \frac{1}{2 \cdot a^2} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow 0$$

### 9.1. Аналитическое решение уравнений

Символьный процессор программы *MathCAD* позволяет решать уравнения и неравенства аналитически, для этого используется встроенная функция *solve* (решить):

Листинг 43. Решение уравнений и неравенств - символьные преобразования

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad x^3 - 5x^2 - 4x + 20 > 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 < x < 2 \\ 5 < x \end{pmatrix}$$

Можно осуществлять символьные подстановки в выражение (Листинг 44). Для этого используется функция *substitute* (подстановка):

Листинг 44. Символьная подстановка

$$f(k,x) := \cos(k \cdot x) + 4x^{2-k}$$

$$f(k,x) \text{ substitute, } k = \sqrt{x} \rightarrow \cos\left(x \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4x^{2-x^{\frac{1}{2}}}$$

#### Ограничения на переменную

При решении уравнений и неравенств, при разложении на множители и во множестве других задач, бывает необходимо искусственно задать ограничения на область определения той или иной переменной. Для этих целей используется встроенная функция *assume* (принять). Введенные ограничения действительны только в области данного оператора – в остальных частях программы они не учитываются.

В примере (Листинг 45) аналитически вычислен определенный интеграл. Символьный процессор *MathCAD* настолько совершенен, что вычислил три решения интеграла, в зависимости от значений *a* и *b* – пределов интегрирования. Принимая ограничения на переменные *a* и *b*, можно получить одно из этих решений, как показано в нижней части примера (Листинг 45).

$$\int_a^b \frac{1}{x^3} dx \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{if } a \neq 0 \wedge b = 0 \\ \infty & \text{if } b \neq 0 \wedge a = 0 \\ -\frac{a^2 - b^2}{2 \cdot a^2 \cdot b^2} & \text{if } (a \geq 0 \vee 0 \geq b) \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^3} dx \text{ assume, } a \neq 0 \wedge b = 0 \rightarrow -\infty \quad \int_a^b \frac{1}{x^3} dx \text{ assume, } a > 0 \wedge b \neq 0 \rightarrow \frac{1}{2 \cdot a^2} - \frac{1}{2 \cdot b^2}$$

Используя команды *float* (вещественные) и *complex* (комплексные), можно переключать символьные вычисления из одного режима в другой.

## 9.2. Упрощение выражений

Возможности символьного процессора *MathCAD* сводят на нет любимое развлечение учителей средней школы – упрощение выражений. Теперь упрощение громоздких и сложных формул можно выполнить одной командой – *simplify* (упростить).

Как видно на примере ниже (Листинг 46), можно заставить операцию *simplify* (и другие функции символьного процессора) возвращать вещественные значения вместо символьных, для этого необходимо один из аргументов функции задать вещественным числом. Как это сделано в примере ниже при вычислении *asin(1.0)*. Нужно понимать при этом, что расчеты всё равно проводятся аналитически, а затем вычисленное значение  $\pi/2$  переводится в формат с десятичной точкой.

Листинг 46. Символьные операции. Упростить выражение

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify} \rightarrow 1$$

$$\text{asin}(1) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \text{asin}(1.) \text{ simplify} \rightarrow 1.5707963267948966192$$

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} + 2x - 5 \text{ simplify} \rightarrow 3 \cdot x - 4 \quad \sqrt{75x^4y} \text{ simplify} \rightarrow 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (x \cdot y)^{\frac{1}{2}}$$

## 9.3. Разложение по степеням

В *MathCAD* имеется встроенная возможность аналитически раскрывать скобки в сложных выражениях, это делается функцией *expand* (раскрыть) и раскладывать на множители (группировать по степеням) – *collect* (сбор), см. Листинг 47.

Листинг 47. Разложение по степеням. Разложение на множители

$$f(x, y, a) := 3 \cdot x^3 \cdot y \cdot (4 \cdot x^2 - 5 \cdot a^3 \cdot y^2) + 2 \cdot a + 4 \cdot x^5 - 12 \cdot a \cdot y^3$$

$$f(x, y, a) \text{ expand, } x \rightarrow 12 \cdot x^5 \cdot y - 15 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot a^3 + 2 \cdot a + 4 \cdot x^5 - 12 \cdot a \cdot y^3$$

$$f(x, y, a) \text{ collect, } x \rightarrow (12 \cdot y + 4) \cdot x^5 - 15 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot a^3 - 12 \cdot a \cdot y^3 + 2 \cdot a$$

$$f(x, y, a) \text{ collect, } y \rightarrow [(-15) \cdot x^3 \cdot a^3 - 12 \cdot a] \cdot y^3 + 12 \cdot x^5 \cdot y + 2 \cdot a + 4 \cdot x^5$$

**Коэффициенты разложения многочлена**

Операция разложения многочлена по степеням эквивалентна вычислению коэффициентов разложения многочлена перед соответствующими степенями переменных, в этом можно убедиться, сравнив *Листинг 47* и *Листинг 48*. Получение этих коэффициентов производится при помощи функции *coeffs* (*коэффициенты*).

*Листинг 48. Вычисление коэффициентов многочлена*

$$f(x, y, a) := 3 \cdot x^3 \cdot y \cdot (4x^2 - 5 \cdot a^3 \cdot y^2) + 2a + 4x^5 - 12a \cdot y^3$$

$$f(x, y, a) \text{ coeffs, } y \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot a + 4 \cdot x^5 \\ 12 \cdot x^5 \\ 0 \\ (-15) \cdot x^3 \cdot a^3 - 12 \cdot a \end{bmatrix}$$

$$f(x, y, a) \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot a - 12 \cdot a \cdot y^3 \\ 0 \\ 0 \\ (-15) \cdot y^3 \cdot a^3 \\ 0 \\ 12 \cdot y + 4 \end{bmatrix}$$

Самый простой и известный со школы способ разложения на степени – это представление полинома в виде произведения сомножителей. Действие это в аналитическом виде может быть проделано при помощи функции *factor* (*факторизация*). Такое преобразование многочлена сразу показывает все его корни:

*Листинг 49. Разложение на множители*

$$x^4 + x^3 - 13x^2 - 25x - 12 \text{ factor} \rightarrow (x + 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 1)^2$$

**Разложение в степенной ряд**

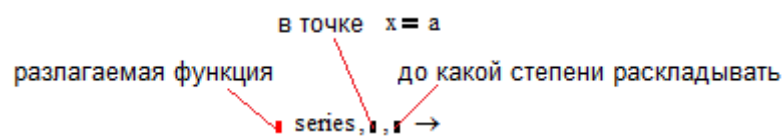
Кроме того, разложение многочлена по степеням можно выполнить, используя встроенную функцию *series* (*разложение в степенной ряд*). Сравните *Листинг 50* с примерами, приведенными выше (*Листинг 47* и *Листинг 48*).

*Листинг 50. Разложение полинома в степенной ряд*

$$f(x, y, a) \text{ series, } x, 6 \rightarrow 2 \cdot a - 12 \cdot a \cdot y^3 + (-15) \cdot y^3 \cdot a^3 \cdot x^3 + (12 \cdot y + 4) \cdot x^5$$

$$f(x, y, a) \text{ series, } y, 5 \rightarrow 2 \cdot a + 4 \cdot x^5 + 12 \cdot x^5 \cdot y + [(-15) \cdot x^3 \cdot a^3 - 12 \cdot a] \cdot y^3$$

Функция *series* представляет в виде ряда *Тейлора* (или ряда *Лорана*) любую функцию, для этого справа от слова *series* необходимо указать раскладываемую функцию, а слева через запятую – в окрестности какой точки производить разложение (если этот параметр не указан, то – в окрестности нуля) и до какой степени раскладывать (по умолчанию – 5).



*Рис. 25 – Функция series – разложение в степенной ряд*

Данная функция очень востребована в задаче разложения громоздкого выражения на простые дроби. Эта задача актуальна для вычисления интегралов через вычеты, с которой вы встретитесь в курсе теории автоматического управления.

*Листинг 51. Разложение в степенной ряд в окрестности точки*

$$\ln(x + 2) \text{ series, } x, 5 \rightarrow \ln(2) + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^3 - \frac{1}{64} \cdot x^4$$

$$\ln(x + 2) \text{ series, } x = 2, 5 \rightarrow \ln(4) + \frac{1}{4} \cdot (x - 2) - \frac{1}{32} \cdot (x - 2)^2 + \frac{1}{192} \cdot (x - 2)^3 - \frac{1}{1024} \cdot (x - 2)^4$$

Пользуясь функциями *expand*, *collect* и *series* можно преобразовать любую функцию к полиномиальному виду, а с полиномами легко работать.

#### 9.4. Задача разложения на простые дроби

Одной из важных задач, часто встречающихся в математике (в теории комплексных функций, теории вычетов, вариационном исчислении) и в прикладных науках является задача разложения дробно-рациональной функции  $R(x)$  вида (29) на сумму простейших рациональных дробей.

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0} \quad (29)$$

Знаменатель этой дроби  $P_n(x)$  может быть представлен в виде элементарных множителей (разложен на множители). Об этом в курсе алгебры строго доказывается [теорема 1](#):

Всякий действительный многочлен  $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$  степени  $n$  может быть представлен в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{\lambda_1} \times \dots \times (x - x_r)^{\lambda_r} \times (x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} \times \dots \times (x^2 + p_sx + q_s)^{\mu_s}, \quad (30)$$

где  $x_1, \dots, x_r$  - различные действительные корни кратностей  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  многочлена  $P_n(x)$ , а  $(x^2 + p_kx + q_k)^{\mu_k}$ ,  $k = 1 \dots s$  - квадратные трехчлены, имеющие комплексные корни соответствующих кратностей  $\mu_1, \dots, \mu_s$ . Причем,  $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_r + 2(\mu_1 + \dots + \mu_s)$ .

В отношении разложения дробно-рациональной функции  $R(x)$  вида (29) на сумму простейших рациональных дробей доказывается следующая [теорема 2](#):

Всякую правильную рациональную дробь  $R(x)$  вида (29), со знаменателем, представленным в виде (30), можно разложить на сумму дробей вида (31) - (32):

$$\frac{A}{(x - x_i)^{\lambda_i}} \text{ и } \frac{Mx + N}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\mu_k}}.$$

В этом разложении каждому действительному корню  $x_i$  кратности  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  соответствует сумма  $\lambda_i$  дробей вида:

$$\frac{A_1}{x - x_i} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{\lambda_i}}{(x - x_i)^{\lambda_i}}, \quad (31)$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней, задаваемых квадратным трехчленом  $(x^2 + p_kx + q_k)^{\mu_k}$ ,  $k = 1 \dots s$ , соответствует сумма дробей вида:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_kx + q_k} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_kx + q_k)^2} + \dots + \frac{M_{\mu_k} \cdot x + N_{\mu_k}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\mu_k}}. \quad (32)$$

Какова же методика разложения рациональной дроби  $R(x)$  вида (29) на сумму дробей вида (31) - (32)?

[Алгоритм](#) очень прост, но громоздок:

- 1) представить знаменатель  $P_n(x)$  в виде (30);
- 2) выписать разложение дроби  $R(x)$  в виде суммы элементарных дробей (31) - (32), полагая коэффициенты  $A_1, \dots, A_{\lambda_i}$ ,  $M_1, \dots, M_{\mu_k}$  и  $N_1, \dots, N_{\mu_k}$  неопределенными;
- 3) привести полученную сумму элементарных дробей к общему знаменателю;
- 4) полученный числитель, включающий неопределенные коэффициенты  $A_1, \dots, A_{\lambda_i}$ ,  $M_1, \dots, M_{\mu_k}$  и  $N_1, \dots, N_{\mu_k}$  приравнять к исходному числителю  $Q_m(x)$  из (29);

5) для нахождения неопределенных коэффициентов нужно приравнять выражения при одинаковых степенях  $x$ , получится система линейных алгебраических уравнений, решением которой, будут коэффициенты  $A_1, \dots, A_{\lambda_i}$ ,  $M_1, \dots, M_{\mu_k}$  и  $N_1, \dots, N_{\mu_k}$ .

Легко убедиться, что при использовании системы MathCAD, данная громоздкая задача решается сравнительно просто (Листинг 52):

Листинг 52. Разложение на простые дроби

**Задача:**  
Разложить на сумму элементарных дробей функцию:

$$\frac{8x^3 - 23x^2 + 37x - 70}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 16x - 48}$$

**Решение:**  
В соответствии с теоремой 1 представим знаменатель дроби в виде (30) при помощи функции *factor*:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 16x - 48 \text{ factor} \rightarrow (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 8)$$

В соответствии с теоремой 2 разложение будем искать в виде суммы:

$$\frac{C}{x - 3} + \frac{D}{x + 2} + \frac{Ex + F}{x^2 - 4x + 8}$$

Приведем данную сумму простейших дробей к общему знаменателю при помощи функции *factor*:

$$\frac{C}{x - 3} + \frac{D}{x + 2} + \frac{Ex + F}{x^2 - 4x + 8} \text{ factor} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16 \cdot C - 24 \cdot D - 6 \cdot F - 2 \cdot C \cdot x^2 + C \cdot x^3 - 7 \cdot D \cdot x^2 + D \cdot x^3 - E \cdot x^2 + E \cdot x^3 + F \cdot x^2 + 20 \cdot D \cdot x - 6 \cdot E \cdot x - F \cdot x}{(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 8)}$$

Рассмотрим числитель полученной дроби:

$$\text{ch}(x) := 16 \cdot C - 24 \cdot D - 6 \cdot F - 2 \cdot C \cdot x^2 + C \cdot x^3 - 7 \cdot D \cdot x^2 + D \cdot x^3 - E \cdot x^2 + E \cdot x^3 + F \cdot x^2 + 20 \cdot D \cdot x - 6 \cdot E \cdot x - F \cdot x$$

Построим коэффициенты разложения числителя по степеням  $x$  при помощи функции *coeffs*. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C, D, E$  и  $F$ . Построим  $A$  – матрицу СЛАУ:

$$\text{ch}(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \cdot C - 24 \cdot D - 6 \cdot F \\ 20 \cdot D - 6 \cdot E - F \\ F - 7 \cdot D - E - 2 \cdot C \\ C + D + E \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 16 & -24 & 0 & -6 \\ 0 & 20 & -6 & -1 \\ -2 & -7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим коэффициенты разложения числителя по степеням  $x$  при помощи функции *coeffs*, получим вектор  $B$  правых частей СЛАУ. Решим систему.

$$B := 8x^3 - 23x^2 + 37x - 70 \text{ coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} -70 \\ 37 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix} \quad X := A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Полученный вектор  $X$  содержит искомые коэффициенты  $C, D, E$  и  $F$ . Подставим их в разложение и получим решение исходной задачи:

$$\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x + 2} + \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 8}$$

Для проверки правильности разложения рациональной дроби  $R(x)$  на сумму элементарных дробей вида (31) - (32), достаточно привести полученное разложение к общему знаменателю и раскрыть скобки, это легко сделать, используя функции *factor* и *expand*.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} + \frac{3x+5}{x^2-4x+8} \text{ factor} \rightarrow \frac{8x^3 - 23x^2 + 37x - 70}{(x-3) \cdot (x+2) \cdot (x^2 - 4x + 8)}$$

$$(x-3) \cdot (x+2) \cdot (x^2 - 4x + 8) \text{ expand} \rightarrow x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 16x - 48$$

В *MathCAD* имеется встроенная функция *parfrac* для реализации разложений на элементарные дроби вида (31) - (32), она позволяет решить задачу, разобранную в примере выше (*Листинг 52*), в одно действие:

Листинг 54. Разложение на простые дроби. Встроенная функция *parfrac*

$$\frac{8x^3 - 23x^2 + 37x - 70}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 16x - 48} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{3x+5}{x^2 - 4x + 8} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-3}$$

## 9.5. Практическая работа №7. Символьные вычисления на MathCAD

Продолжительность – 4 часа.

### Цель работы

Получение умений, навыков и компетенций работы с символьным процессором *MathCAD*. Приобретение уверенности при операциях со сложными выражениями, упрощение, приведение к множителям. Решение неравенств.

Получение навыков решения задачи по разложению дробно-рациональной функции на простейшие дроби<sup>1</sup>. Применение полученных ранее навыков решения СЛАУ.

### Задание на практическую работу

1. Разложить дробно-рациональную функцию, заданную в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 12, Приложение 7*), на простейшие дроби вида (31) - (32). Разложение произвести двумя способами:

1.1. при помощи метода неопределенных коэффициентов (*Листинг 52*);

1.2. при помощи встроенных функций *MathCAD*.

2. Произвести проверку правильности разложения.

3. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

### Контрольные вопросы:

1. Как символично упростить громоздкое выражение?
2. Воспроизведите алгоритм разложения на простые дроби.
3. Имеет ли *MathCAD* средства разложения функции в степенные дроби?
4. Как символично вычислить коэффициенты многочлена?

<sup>1</sup> Данный материал будет востребован в 3-4 семестрах изучения курса «Высшая математика» в разделах «Теория функций комплексных переменных», «Операционное исчисление»

## 10. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ

Этот раздел посвящен методам обработки выборочных данных – *интерполяции*, *экстраполяции* и *регрессии*. Основным объектом исследования будет *выборка экспериментальных данных*, которые, представляются в виде массива пар чисел  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1..n$ . Возникает задача аппроксимации дискретной зависимости  $y(x_i)$  непрерывной функцией  $f(x)$ . Функция  $f(x)$ , в зависимости от специфики задачи, может отвечать различным требованиям:

- $f(x)$  должна проходить через точки  $(x_i, y_i)$ , т.е.  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 1..n$ . В этом случае говорят об **интерполяции** функции  $f(x)$  во внутренних точках  $x \in [x_1, x_n]$  или **экстраполяции** во внешних точках:  $x < x_1$  или  $x > x_n$  – за пределами заданного интервала.
- $f(x)$  должна некоторым образом (например, в виде определенной аналитической зависимости) приближать  $y(x_i)$ , не обязательно проходя через точки  $(x_i, y_i)$ .

Такова постановка задачи **регрессии**.

*MathCAD* имеет целый арсенал встроенных функций, позволяющих осуществлять различные виды регрессии, интерполяции и экстраполяции.

### 10.1. Интерполяция

Для построения интерполяции-экстраполяции в *MathCAD* имеется несколько встроенных функций, позволяющих «соединить» точки выборки данных  $(x_i, y_i)$  кривой разной степени гладкости. По определению интерполяция означает построение функции  $\varphi(x)$ , аппроксимирующей зависимость  $y(x_i)$  в промежуточных точках (между  $x_i$ ). Поэтому интерполяцию называют кроме того *аппроксимацией*.

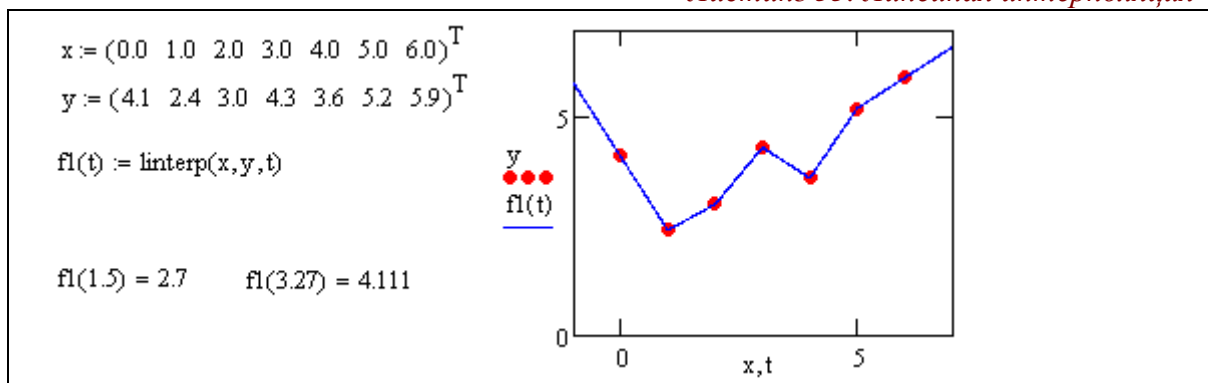
#### Линейная интерполяция

Самый простой вид интерполяции – линейная, которая представляет искомую зависимость  $\varphi(x)$  в виде ломаной линии (*Листинг 55*).

Для построения линейной интерполяции служит встроенная функция  $\text{linterp}(x, y, t)$  – функция, аппроксимирующая данные векторов  $x$  и  $y$  кусочно-линейной зависимостью. Здесь  $x$  – вектор аргументов, а  $y$  – вектор соответствующих значений того же размера;  $t$  – координата, в которой вычисляется интерполирующая функция.

При составлении вектора  $x$  следует помнить, что его элементы должны быть определены в порядке возрастания, т.е.  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Листинг 55. Линейная интерполяция



**Кубическая сплайн-интерполяция**

В большинстве практических приложений желательно соединить экспериментальные точки не ломаной линией, а гладкой кривой. Лучше всего для этих целей подходит интерполяция кубическими сплайнами, т.е. отрезками кубических парабол:

$interp(s, x, y, t)$  – функция, аппроксимирующая данные векторов  $x$  и  $y$  кубическими сплайнами;  $s$  – вектор вторых производных, созданный одной из сопутствующих функций  $cspline$ ,  $pspline$  или  $lspline$ :

$s := lspline(x, y)$  – вектор значений коэффициентов линейного сплайна;

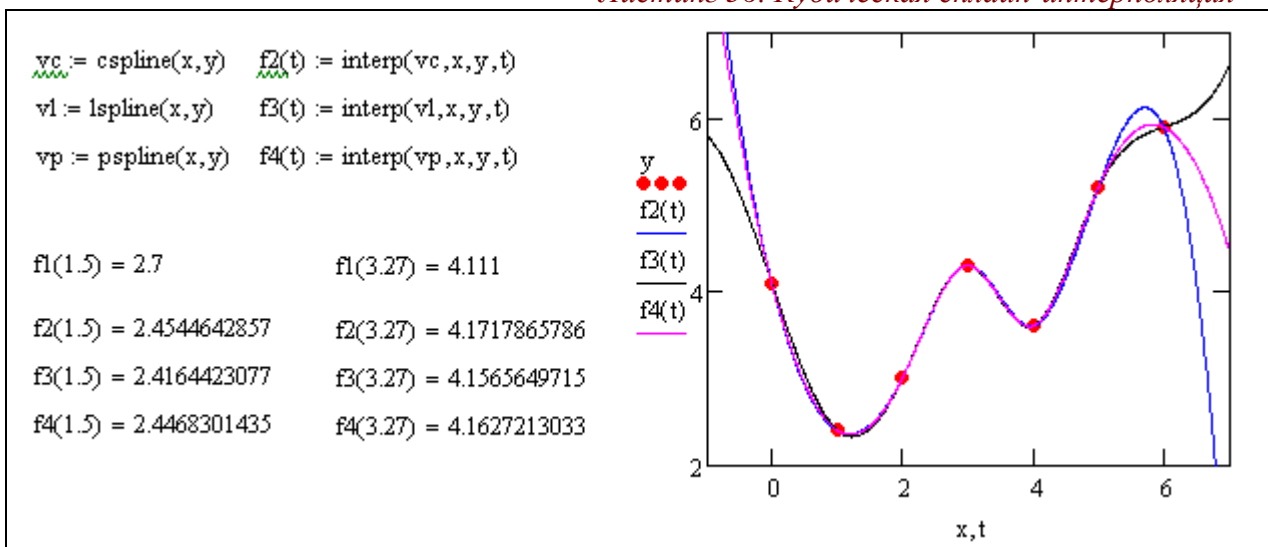
$s := pspline(x, y)$  – вектор значений коэффициентов квадратичного сплайна;

$s := cspline(x, y)$  – вектор значений коэффициентов кубического сплайна.

$x, y$  — векторы данных  $(x_i, y_i)$ .

Выбор конкретной функции сплайновых коэффициентов влияет на интерполяцию вблизи конечных точек интервала (Листинг 56).

Листинг 56. Кубическая сплайн-интерполяция



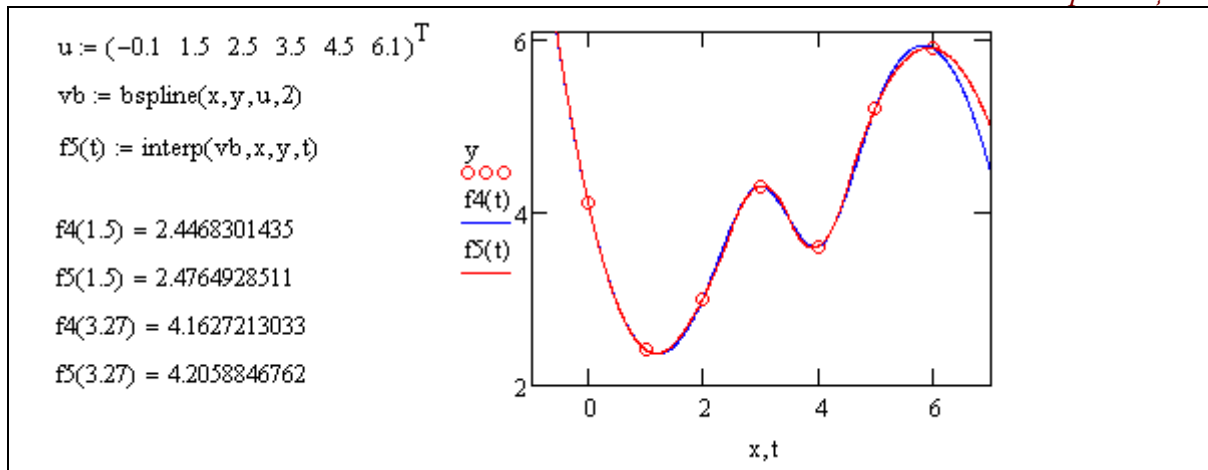
Смысл сплайн-интерполяции заключается в том, что в промежутках между точками осуществляется аппроксимация в виде зависимости  $\varphi(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ . Коэффициенты  $a, b, c, d$  рассчитываются независимо для каждого промежутка, исходя из значений  $y_i$  в соседних точках. Этот процесс скрыт от пользователя, поскольку смысл задачи интерполяции состоит в выдаче значения  $\varphi(x)$  в любой точке  $t$  (Листинг 56). Чтобы подчеркнуть различия, соответствующие разным вспомогательным функциям  $cspline$ ,  $pspline$ ,  $lspline$ , графики приведены на одном рисунке. Как видно, выбор вспомогательных функций существенно влияет на поведение  $\varphi(x)$  вблизи граничных точек рассматриваемого интервала и особенно разительно меняет результат экстраполяции данных за его пределами.

**Полиномиальная сплайн-интерполяция**

Более сложный тип интерполяции – так называемая интерполяция *B-сплайнами* (Листинг 57). В отличие от обычной сплайн-интерполяции сшивка элементарных *B-сплайнов* производится не в точках  $x_i$  а в других точках  $u_i$ , координаты которых предлагается ввести пользователю. Сплайны могут быть полиномами 1, 2 или 3 степени (линейные, квадратичные или кубические). Применяется интерполяция *B-сплайнами* точно так же, как и обычная сплайн-интерполяция, различие состоит только в определении вспомогательной функции коэффициентов сплайна.



Листинг 57. Полиномиальная сплайн-интерполяция



$interp(s, x, y, t)$  – функция, аппроксимирующая данные векторов  $x$  и  $y$  с помощью  $B$ -сплайнов;

$s := bspline(x, y, u, n)$  – вектор значений коэффициентов  $B$ -сплайна; где  $s$  – вектор вторых производных, созданный функцией  $bspline$ ;  $x, y$  – векторы данных  $(x_i, y_i)$ ;  $t$  – точка, в которой вычисляется интерполирующая функция;  $u$  – вектор значений аргумента, в которых производится сшивка  $B$ -сплайнов;  $n$  – порядок полиномов онлайн-интерполяции (1, 2 или 3).

Размерность вектора  $u$  должна быть на 1, 2 или 3 меньше размерности векторов  $x$  и  $y$ . Первый элемент вектора  $u$  должен быть меньше или равен первому элементу вектора  $x$ :  $u_1 \leq x_1$ , а последний – больше или равен последнему элементу  $x$ .

### Сплайн-экстраполяция

Все описанные выше функции интерполяции работают также и как функции экстраполяции данных. Для вычисления экстраполяции достаточно просто указать соответствующее значение аргумента, которое лежит за границами рассматриваемого интервала. С этой точки зрения разницы в применении в *MathCAD* между интерполяцией и экстраполяцией нет.

На практике при построении экстраполяции следует соблюдать известную осторожность, не забывая о том, что ее успех определяется значимостью ближайших к границе интервала точек – чем дальше от них, тем сомнительнее будет результат.

### Многомерная интерполяция

Двумерная сплайн-интерполяция приводит к построению поверхности  $z(x, y)$ , проходящей через массив точек, описывающий сетку на координатной плоскости  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1..n$ . Поверхность создается участками двумерных кубических сплайнов, являющихся функциями  $(x_i, y_i)$  и имеющих непрерывные первые и вторые производные по обеим координатам.

Многомерная интерполяция строится с помощью тех же встроенных функций, что и одномерная, но имеет в качестве аргументов не векторы, а соответствующие матрицы.

$interp(s, x, z, v)$  – скалярная функция, аппроксимирующая данные выборки двумерного поля по координатам  $x$  и  $y$  кубическими сплайнами,  $s$  – вектор вторых производных, созданный одной из сопутствующих функций  $cspline$ ,  $pspline$  или  $lspline$ ;  $x$  – матрица размерности  $n \times 2$ , определяющая диагональ сетки значений аргумента (элементы обоих столбцов соответствуют меткам  $x$  и  $y$  и расположены в порядке возрастания);  $z$  – матрица значений функции размерности  $n \times n$ ;  $v$  – вектор из двух элементов, содержащий значения аргументов  $x$  и  $y$ , для которых вычисляется интерполяция.

Вспомогательные функции построения вторых производных имеют те же матричные аргументы: *lspline(x, y)*, *pspline(x, y)*, *cspline(x, y)*.

Листинг 58. Формирование матриц многомерной интерполяции

```

X :=  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$    Y :=  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 5 & 3 & 2.1 & 1.5 \\ 1.3 & 3.3 & 5 & 1.7 & 2 \\ 1.3 & 3 & 3.7 & 2.1 & 2.9 \\ 1.5 & 2 & 2.5 & 2.8 & 1 \end{pmatrix}$    S := lspline(X, Y)
i := 0..40   j := 0..40   Ai,j := interp(S, X, Y,  $\begin{pmatrix} i \\ 10 \\ j \\ 10 \end{pmatrix}$ )
t :=  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$    interp(S, X, Y, t) = 4.6462053571
    
```

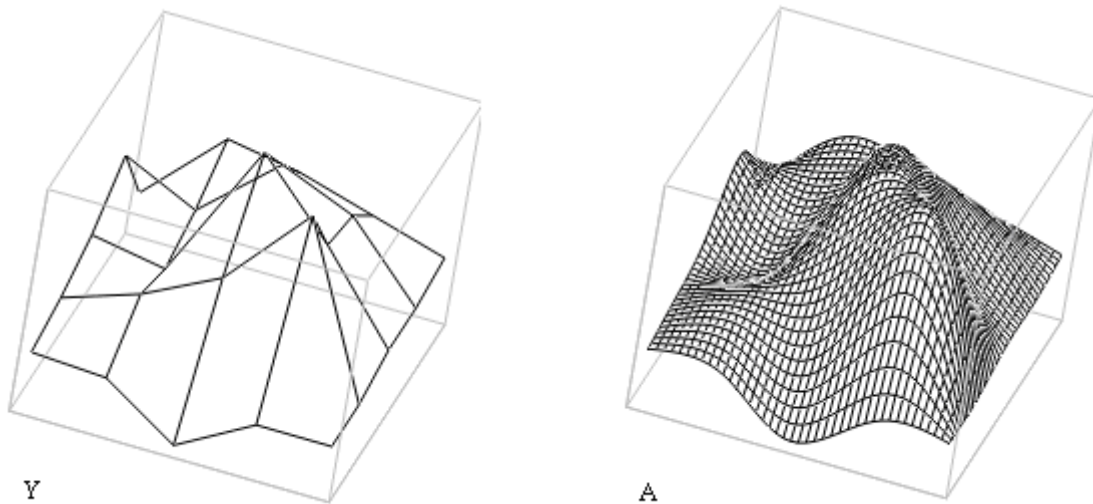


Рис. 26 – Результат двумерной интерполяции

## 10.2. Регрессия

Задачи математической *регрессии* сводятся к приближению выборки данных  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1..n$ . некоторой функцией  $f(x)$ , определенным образом минимизирующей совокупность *ошибок*  $\varepsilon_i = |f(x_i) - y_i|$ . Регрессия сводится к подбору типа функции  $f(x)$  и неизвестных коэффициентов, определяющих аналитическую зависимость  $f(x)$ . В силу производимого действия большинство задач регрессии являются частным случаем более общей *проблемы сглаживания данных*.

Как правило, регрессия очень эффективна, когда заранее известен (или, по крайней мере, хорошо угадывается) закон распределения данных  $(x_i, y_i)$  – тип функции  $f(x)$ . *MathCAD* позволяет реализовать практически любой алгоритм регрессии, кроме того здесь имеются встроенные функции реализующие *регрессию одним полиномом, отрезками нескольких полиномов*, а также *двумерная регрессия массива данных*.

### Регрессия одним полиномом

Полиномиальная регрессия означает приближение данных  $(x_i, y_i)$  полиномом  $k$ -й степени  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ , для построения такого полинома коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  требуется рассчитать. Для построения регрессии полиномом  $k$ -й степени необходимо наличие, по крайней мере,  $k+1$  точек данных. При  $k = 1$  полином является прямой линией, при  $k = 2$  – параболой, и т.д.

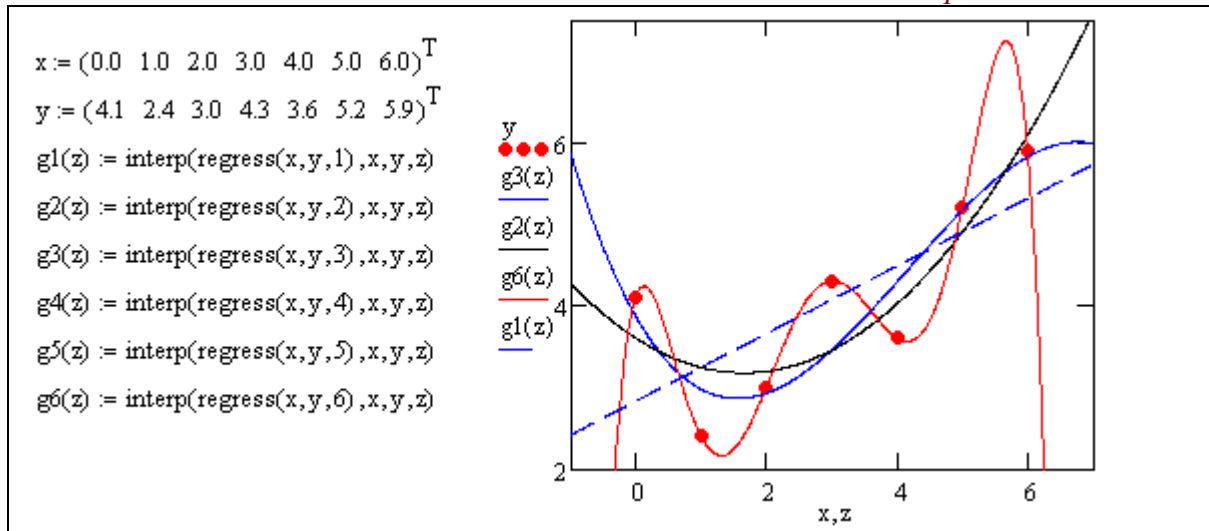
В *MathCAD* полиномиальная регрессия осуществляется комбинацией встроенной функции *regress* и полиномиальной интерполяции:

$s = \text{regress}(x, y, k)$  – расчет вектора коэффициентов для построения полиномиальной регрессии данных;

$\text{interp}(s, x, y, t)$  – результат полиномиальной регрессии.

Здесь  $x, y$  – вектор экспериментальных данных аргумента в порядке возрастания и вектор значений того же размера;  $k$  – степень полинома регрессии (целое положительное число);  $t$  – значение аргумента полинома регрессии.

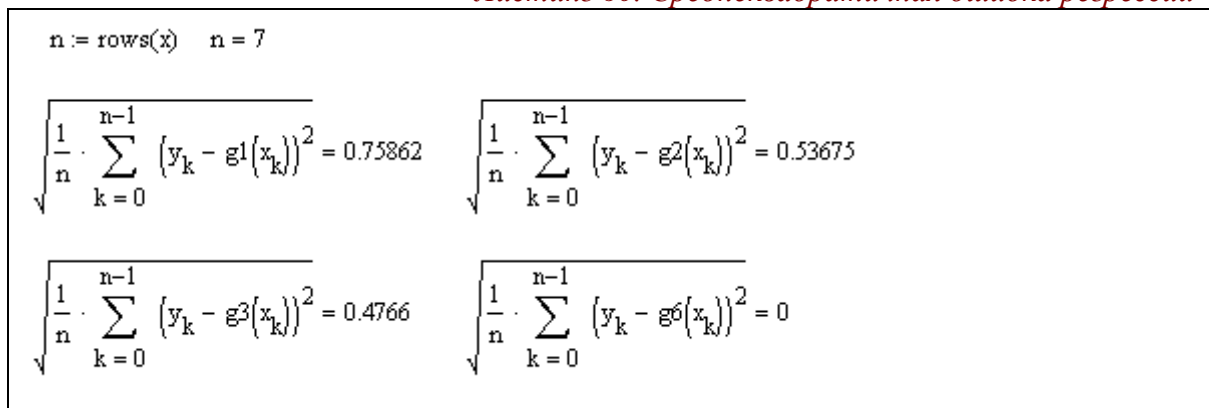
Листинг 59. Регрессия полиномом



### Точность регрессии

Качество регрессии можно оценить величиной среднеквадратической ошибки аппроксимации в выборочных точках  $(x_i, y_i)$ . Рассмотрим такую оценку на примере полиномиальной регрессии с полиномами различной степени (Листинг 59).

Листинг 60. Среднеквадратичная ошибка регрессии



Полином 1-го порядка  $g1(z)$  – прямая линия, его график проходит с минимальным среднеквадратическим удалением от выборочных точек. Полином 6-го порядка  $g6(z)$  имеет 7 параметров – коэффициентов, поэтому его график точно прошел через все выборочные точки, регрессия превратилась в интерполяцию. Для каждого из полиномов во всех узловых точках  $(x_i, y_i)$  построены величины среднеквадратической ошибки аппроксимации.

Здесь функция *rows* используется для определения размерности массива  $x$ .

Как следует из приведенных выше результатов, «точность» регрессии растет с увеличением порядка аппроксимирующего полинома. В том случае, когда число коэффициентов полинома (оно на единицу больше его степени) сравняется с размером выборки график полинома начинает проходить через все выборочные точки, ошибка становится нулевой (с точностью до округления). Полином регрессии превращается в интерполяционный полином, дальнейшее наращивание степени бесполезно.

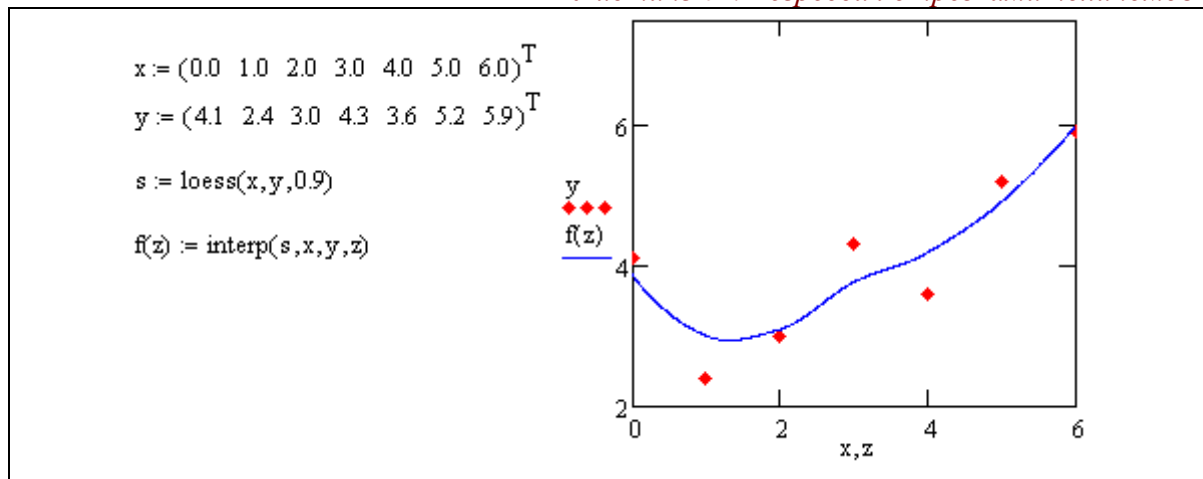
С повышением порядка полинома регрессии ухудшаются «сглаживающие» свойства аппроксимации, кривая графика начинает осциллировать, стремясь «достать» каждую выборочную точку. Это обстоятельство негативно сказывается на результате, если в выборке имеется шумовая компонента.

### Регрессия отрезками полиномов

Помимо приближения массива данных одним полиномом имеется возможность осуществить регрессию сшивкой отрезков (точнее говоря, участков, т.к. они имеют криволинейную форму) нескольких полиномов. Для этого имеется встроенная функция *loess*, применение которой аналогично функции *regress*:

$s = \text{loess}(x, y, \text{span})$  – вектор коэффициентов для построения регрессии данных отрезками полиномов;  $\text{interp}(s, x, y, t)$  – результат полиномиальной регрессии. Здесь *span* – параметр, определяющий размер отрезков полиномов (положительное число, хорошие результаты дает значение порядка  $\text{span}=0.75$ ). Параметр *span* задает степень сглаженности данных, при больших значениях *span* регрессия практически не отличается от регрессии одним полиномом.

Листинг 61. Регрессия отрезками полиномов



### Двумерная полиномиальная регрессия

По аналогии с одномерной полиномиальной регрессией и двумерной интерполяцией, *MathCAD* позволяет приблизить множество точек  $z_{i,j} = Z(x_i, y_j)$  поверхностью, которая определяется многомерной полиномиальной зависимостью. В качестве аргументов встроенных функций для построения полиномиальной регрессии должны стоять в этом случае не векторы, а соответствующие матрицы.

$s = \text{regress}(x, z, k)$  – вектор коэффициентов для построения полиномиальной регрессии данных (одним полиномом).

$s = \text{loess}(x, z, \text{span})$  — вектор коэффициентов для построения регрессии данных отрезками полиномов.

$\text{interp}(s, x, z, v)$  – скалярная функция, аппроксимирующая данные выборки двумерного поля по координатам  $x$  и  $z$  кубическими сплайнами.

Здесь  $s$  – вектор вторых производных, созданный одной из сопутствующих функций *loess* или *regress*;  $x$  – матрица размерности  $n \times 2$ , определяющая пары значений

аргумента – столбцы соответствуют точкам  $(x_i, y_j)$ ;  $z$  – вектор данных размерности  $n$ ;  $span$  – параметр, определяющий размер отрезков полиномов;  $k$  – степень регрессии полинома (целое положительное число);  $v$  – вектор из двух элементов, содержащий значения аргументов  $(x_i, y_j)$ , для которых вычисляется интерполяция.

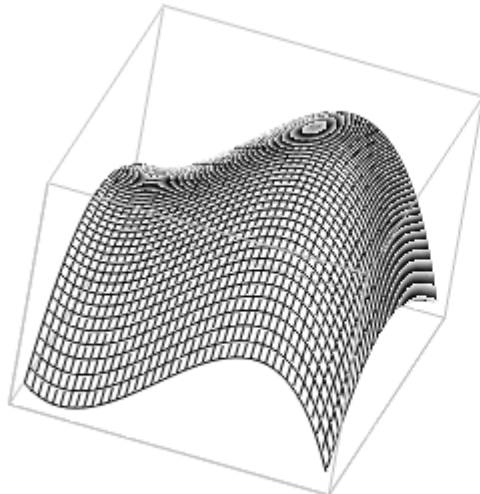
Листинг 62. Двумерная полиномиальная регрессия

```

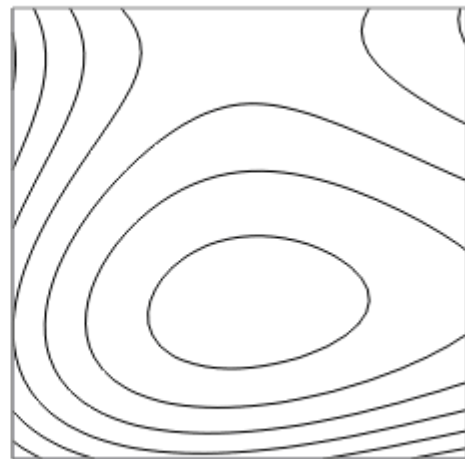
X := (0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4)ᵀ
     (0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4)ᵀ

Y := (1 2 0 1.1 1.2 1 5 3 2.1 1.5 1.3 3.3 5 1.7 2 1.3 3 3.7 2.1 2.9 1.5 2 2.5 2.8 1)ᵀ

S := regress(X, Y, 3)
i := 0..40  j := 0..40
Ai,j := interp [ S, X, Y, ( i / 10 ) ]
                [ ( j / 10 ) ]
    
```



A



A

Рис. 27 – Двумерная полиномиальная регрессия

Для построения регрессии не предполагается никакого предварительного упорядочивания данных, в связи с этим данные представляются как вектор.

**Другие типы регрессии**

Кроме рассмотренных, в *MathCAD* встроено еще несколько видов двумерной регрессии. Их реализация несколько отличается от приведенных выше вариантов регрессии тем, что для них, помимо массива данных, требуется задать некоторые начальные значения коэффициентов  $a, b, c$ . Используйте соответствующий вид регрессии, если хорошо представляете себе, какой зависимостью описывается ваш массив данных. Когда тип регрессии плохо отражает последовательность данных, то ее результат часто бывает неудовлетворительным и даже сильно различающимся в зависимости от выбора начальных значений. Каждая из функций выдает вектор уточненных параметров  $a, b, c$ .

$expfit(x, y, g)$	регрессия экспонентой	$f(x) = a \cdot e^{bx} + c$
$igsfit(x, y, g)$	регрессия логистической функцией	$f(x) = a / (1 + b \cdot e^{-cx})$
$sinfit(x, y, g)$	регрессия синусоидой	$f(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$
$pwfit(x, y, g)$	регрессия степенной функцией	$f(x) = a \cdot x^b + c$

$\logfit(x, y, g)$	регрессия логарифмической функцией	$f(x) = a \cdot \ln(x + b) + c$
$\lnfit(x, y)$	двухпараметрической логарифмической функцией	$f(x) = a \cdot \ln(x) + b$

### 10.3. Практическая работа № 8. Интерполяция и регрессия

Продолжительность – 2 часа.

#### Цель работы

Приобретение компетенций в части применения средств *MathCAD* при обработке экспериментальных данных. Получение навыков интерполяции и экстраполяции последовательности значений. Приобретение компетенций в вопросах сглаживания данных и обработки последовательности с помехами.

#### Задание на практическую работу

- Проиллюстрировать на примере методы одномерной интерполяции и экстраполяции:
  - Сформировать случайный набор «экспериментальных» данных из двух векторов  $X$  (абсциссы) и  $Y$  (ординаты) по  $n$  элементов в каждом. Воспроизвести выборочные точки на графике, используя тип графика *points* с символом "●".
  - Выполнить линейную интерполяцию функцией *linterp* и воспроизвести интерполирующую кривую на том же графике, что и выборочные точки.
  - Выполнить интерполяцию кубическими сплайнами с использованием функциями *lspline*, *pspline* и *cspline* воспроизвести интерполирующие кривые на одном графике. На том же графике отобразить и выборочные точки. Выполнить интерполяцию кубическими В-сплайнами (*bspline*), подобрав вектор  $u$  точек сшивки сплайнов. Отобразить на графике точки сшивки.
  - Оценить экстраполирующие свойства аппроксимирующих функций, построенных в п. 1.3, для этого следует продолжить их графики за пределы выборочных данных.
- Произвести регрессию заданной последовательности данных, для чего:
  - Сгладить данные вектора  $Y$  регрессионным полиномом степени  $q$ , построить сглаживающую кривую на графике и проанализировать величину среднеквадратичной ошибки.
  - Произвести регрессию отрезками полиномов и оценить величину среднеквадратичной ошибки для данного вида регрессии.
- Произвести двумерную интерполяцию заданным в индивидуальном задании способом для двумерного массива  $Y$  размерности  $m \times m$ . Построить интерполирующую поверхность на графике.
- Произвести двумерную регрессию заданным в индивидуальном задании способом для одномерного массива  $Y$  размерности  $m^2$ . Построить сглаживающую поверхность на графике и проанализировать величину среднеквадратичной ошибки.
- Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести графики с результатами работы программы.

#### Контрольные вопросы:

- Чем отличаются понятия интерполяция и регрессия?
- Какими средствами решения задач регрессии обладает *MathCAD*?
- Как оценит погрешность интерполяции? Регрессии?
- В чем идея сплайн-интерполяции?
- Связана ли интерполяционная точность с количеством точек разбиения? Как?
- Какими средствами решения задач интерполяции обладает *MathCAD*?
- Связана ли интерполяционная точность с величиной шага сетки?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный курс «Профессиональные математические пакеты» является вводным с точки зрения исследования возможностей САЕ-систем профессиональной математики. В него не вошли разделы, посвященные численным методам аппроксимации, решения дифференциальных уравнений, интегрирования и дифференцирования. Однако, навыки и компетенции, полученные студентом в данном курсе, позволят обучаемому уверенно выполнять расчетные работы из таких дисциплин как «Высшая математика», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Физика», «Теоретические основы электротехники», «Теория автоматического управления» и «Методы анализа и расчета электронных схем».

Курс преследует цели получения компетенций, позволяющих учащемуся делать стратегическую оценку решаемой математической задачи, основывающуюся на понимании и ясном представлении цели исследований и абстрагировании от шаблонов и алгоритмов поиска решений. Поиск конкретного числового решения обучаемый делегирует системе *MathCAD*.

Выполнение лабораторных и практических работ по данному курсу дает необходимый объем знаний, умений, навыков и компетенций, который может потребоваться студенту, обучающемуся по специальности «Электроника и нанoeлектроника», в его учебной деятельности и научной работе.

Повысить свои навыки в части профессиональных математических пакетов студент сможет в курсах «Математическое моделирование и программирование» и «Прикладная информатика».

Руководство может быть использовано для проведения практических занятий и лабораторных работ как аудиторно, так и в режиме самоподготовки.

Руководство рекомендовано для организации самостоятельной работы студентов.

Наличие вариантов индивидуальных заданий позволяет использовать настоящее руководство для проведения контрольных работ и итогового тестирования.

Для освоения дисциплины «Профессиональные математические пакеты» достаточно знаний, полученных студентом в школьных курсах математики, информатики и физики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematica. Система компьютерной алгебры компании Wolfram Research. Официальный сайт компании Wolfram Research <http://www.wolfram.com>. Способ доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/>.
2. Maple. Программный пакет компьютерной алгебры компании Waterloo Maple Inc. Официальный сайт: <http://www.maplesoft.com/>. Способ доступа: <http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx>.
3. MatLab. Пакет математических и инженерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика MathWorks <http://www.mathworks.com/>. Способ доступа: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
4. MathCAD. Система компьютерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика Mathsoft <http://www.mathsoft.com/>, в составе PTC Community <http://communities.ptc.com>. Способ доступа: <http://www.mathcad.com/>, <http://communities.ptc.com/community/mathcad>
5. Михальченко, Сергей Геннадьевич. Профессиональные математические пакеты [Электронный ресурс] : Учебное пособие / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2013. – on-line, 78 с. Способ доступа: <http://ie.tusur.ru/content.php?id=444>
6. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. — М.: «ДМК Пресс», 2009. — С. 624. — ISBN 978-5-94074-553-2
7. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. Изд-е второе дополненное и переработанное. — М.: «СОЛОН-Пресс», 2008. — С. 744. — ISBN 978-5-91359-045-9
8. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. — М.: Мир, 1997. — С. 208. — ISBN 5-03-003255-X
9. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: СОЛОН Пресс, 2006. — С. 720. — ISBN 5-98003-258-4
10. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. — М.: Диалектика, 2003. — С. 352. — ISBN 5-8459-0452-8
11. Матросов А. В. Maple 6: Решение задач высшей математики и механики: Практическое руководство. 2001 г. 528 с. ISBN 5-94157-021-X
12. Дьяконов В. П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. Изд-е 2-е, переработанное и дополненное. Библиотека профессионала. — Москва.: «СОЛОН-Пресс», 2008. — С. 800. — ISBN 978-5-91359-042-8
13. Дьяконов В. П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. — Москва.: «ДМК-Пресс», 2011. — С. 976. — ISBN 978-5-94074-492-4
14. Курбатова Екатерина Анатольевна. MATLAB 7. Самоучитель. — М.: «Диалектика», 2005. — С. 256. — ISBN 5-8459-0904-X
15. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MATLAB = Numerical Methods: Using MATLAB. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2001. — С. 720. — ISBN 0-13-270042-5
16. В.Ф. Очков. MathCAD 14 для студентов и инженеров. СПб.: BHV, 2009.
17. А. Васильев. MathCAD 13 на примерах (+ CD-ROM). С-Пб: БХВ-Петербург, 2006, 512с. ISBN: 5-94157-880-6.



18. Д. В. Кирьянов. MathCAD 12. Наиболее полное руководство (+ CD-ROM). С-Пб: БХВ-Петербург, 2005, 566 с. ISBN: 5-94157-407-X.
19. Дьяконов В. MathCAD 2001: Учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.
20. А. Черняк, Ж. Черняк, Ю. Доманова. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс С-Пб.:БХВ-Петербург, 2004.
21. В.А. Охорзин. Прикладная математика в системе MATHCAD Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009, 352с. ISBN: 978-5-8114-0814-6.
22. Р.Ивановский. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде MathCAD. М.: БХВ-Петербург, 2008, 528с. ISBN978-5-9775-0199-6.
23. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9. М: ИТ Пресс, 2006, 496с. ISBN: 5-477-00208-5.
24. В. В. Фриск. MathCAD. Расчеты и моделирование цепей на ПК. Москва: Солон-Пресс, 2006. ISBN: 5-98003-242-8.
25. Д. В. Кирьянов, Е. Н. Кирьянова. Вычислительная физика (с курсом лекций на CD) +. М.: Полибук Мультимедиа, 2006.
26. О.Гольдберг. Переходные процессы в электрических машинах и аппаратах и вопросы их проектирования. М.: Высшая школа. 2001.
27. С.Поршнеv. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD. Учебное пособие. М.: Горячая линия - Телеком, 2002.
28. М.Панько. Расчет и моделирование автоматических систем регулирования в среде MathCAD. Издательство МЭИ. 2001.
29. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB = Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007. — ISBN 978-5-8459-1166-7
30. Коновалов, Борис Игоревич. Теоретические основы электротехники. Часть 1 [Электронный ресурс] : Учебное методическое пособие / Б. И. Коновалов; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2006. – on-line, 75 с. Способ доступа: <http://ie.tusur.ru/content.php?id=444>
31. Коновалов, Борис Игоревич. Теоретические основы электротехники. Часть 1 [Электронный ресурс] : Учебное пособие / Б. И. Коновалов; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2006. – on-line, 145 с. Способ доступа: <http://ie.tusur.ru/content.php?id=444>

**Практическая работа №1. Вычисления на MathCAD**  
**Варианты индивидуальных заданий**

Таблица 3

№	$p(x, y)$	$(x_0, y_0)$
1.	$\frac{x^{\sin(y+1)} + x^{\cos(y)}}{2^x + 2^y}$	$x_0 = 5 \cdot (7.8 + \sqrt{75}), y_0 = 2.1 \cdot \pi + \sqrt{3.3 \cdot e}$
2.	$\frac{\sin(y^{-2x}) + \cos(x^{2y})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x_0 = \sqrt{y_0 \cdot (8 + \sqrt{5})}, y_0 = (2.1 \cdot \pi)^{-5}$
3.	$\frac{e^{\sin(y+1)} + e^{\cos(x+1)}}{2^x + 2^y} + \sin(y) \cos(x)$	$x_0 = \sqrt{\pi^2 + e^2}, y_0 = (0.12 \cdot \sqrt{\pi})^{-4}$
4.	$\left  \frac{\sin(x) \cdot \ln^2(y)}{\ln^2(x) \cdot \cos(y)} \right $	$x_0 = 5^{0.1} \cdot (0.8 + \sqrt{13}), y_0 = 2.1 \cdot \pi + 3.3$
5.	$\frac{1}{xy} \sin(x^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(y^2)$	$x_0 = \sqrt{3.3 \cdot (\pi + \sqrt{\pi})}, y_0 = (2.1 \cdot \pi + 3.3)^{-x_0}$
6.	$\sqrt{ \sin^3(y-x) } + \sqrt{ \cos^3(x-y) }$	$x_0 = (7.1 + \sqrt{7.5})^{0.9}, y_0 = \sqrt{2.2 \cdot \pi + 3.3 \cdot e}$
7.	$\operatorname{tg}(x^2 - y^2) \cdot e^{\operatorname{ctg}(xy)}$	$x_0 = \sqrt{(8 + \sqrt{5})/\pi}, y_0 = \sqrt{x_0 \cdot 12.3 + \pi^2}$
8.	$\cos(x^2 - y^2) \cdot e^{\sin^2(xy)}$	$x_0 = e^{\log_2(12.3 - \pi \cdot y_0)}, y_0 = \ln(2.11 \cdot \pi)$
9.	$x^{\sin(y+2)} \cdot y^{\cos(x+2)} \cdot e^{xy}$	$x_0 = \pi^2 - (1 + \sqrt{7 \cdot e}), y_0 = 2.1 \cdot \pi^3 - 0.4 \cdot e$
10.	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} \ln(x^2 + y^2)\right) / (x^2 + y^2)$	$x_0 = \sqrt{\pi^2 - e^2}, y_0 = \sqrt{\sin(\pi + e)}$
11.	$\sin( x-y ) + \cos( y-x ) \frac{2}{xy}$	$x_0 = \sqrt{7} - 5 \cdot (7 + \pi^2), y_0 = \sqrt{3.13 \cdot e \cdot \sqrt{\pi}}$
12.	$e^{\sin^2(x+y)} + e^{\cos^2(x-y)}$	$x_0 = \sqrt{\sin(8 + \sqrt{\pi})}, y_0 = \cos(e \cdot \pi)^{-3}$
13.	$\sin( x-y ) + \cos( y-x ) \frac{2}{xy}$	$x_0 = (71 + \sqrt{135}) \cdot e^{0.9}, y_0 = \sqrt{22 \cdot \pi^2 + 33 \cdot e^2}$
14.	$\sqrt{ \sin^3(y-x) } + \sqrt{ \cos^3(x-y) }$	$x_0 = \sqrt{\pi^2 y_0^2 + e^2}, y_0 = (12 \cdot \sqrt{\pi + e})^{-4.1}$
15.	$3 \cdot e^{\operatorname{tg}(x+y)} + 3 \cdot e^{\operatorname{ctg}(x-y)} - 3xy$	$x_0 = \sqrt{(81e^2)/\pi^2}, y_0 = \sqrt{x_0 \cdot 12^3 + \pi^2}$
16.	$\sqrt{ \sin^3(y-x) } / (x^2 + y^2)$	$x_0 = \sqrt{\sin(\pi^2 e^2)}, y_0 = (16 \cdot \sqrt{\cos^2(e \cdot \pi)})^{-2}$
17.	$\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) + \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$	$x_0 = (0.111 \cdot \sqrt{75})^3, y_0 = \sqrt{e^{2x} + x^{2e}}$
18.	$e^{\sqrt{x^2 + y^2}} + e^{\sqrt{x^2 - y^2}} - e^{xy}$	$x_0 = \sqrt{\sin^2(\pi/13)/\pi}, y_0 = \sqrt{(x_0)^2 + e^2 + \pi^2}$
19.	$e^{\sin^{-2}(x+y)} + e^{\cos^{-2}(x-y)}$	$x_0 = e^{-\log_{10}(12 - \pi \cdot y_0)}, y_0 = \ln(2\pi + 56.7)$

Таблица 4

№	$f(x)$	$x$	$\varepsilon$
1.	$f(x) = x^2 \cdot \sin(2x + 3)$	$x \in [-7, 7]$	$\varepsilon = 10^{-7}$
2.	$f(x) = \ln(2x) \cdot \cos(3x - 5) / x$	$x \in (0, 4]$	$\varepsilon = 10^{-9}$
3.	$f(x) = \ln(2x) / (x - 2) + 2 \cos(x)$	$x \in (0, 6)$	$\varepsilon = 10^{-5}$
4.	$f(x) = x \cdot \sin^2(2x) / (x + 3) - \sin(\pi / 10)$	$x \in (-\pi, \pi)$	$\varepsilon = 10^{-10}$
5.	$f(x) = \ln^2(2x) \cdot \sin(3x)$	$x \in (0, 2\pi]$	$\varepsilon = 10^{-8}$
6.	$f(x) = e^{-2x} \sin(3x)$	$x \in (0, 2\pi)$	$\varepsilon = 10^{-9}$
7.	$f(x) = \cos(2x) - 5 \sin(3x)$	$x \in (-2\pi, 2\pi)$	$\varepsilon = 10^{-7}$
8.	$f(x) = \sin(x) \cdot e^{3x} - \cos(x) \cdot e^{-4x}$	$x \in (-2\pi, 2\pi)$	$\varepsilon = 10^{-9}$
9.	$f(x) = \sin(2 \ln(5x) + 2)$	$x \in (0.01, 9]$	$\varepsilon = 10^{-5}$
10.	$f(x) = \sin(x + 3) / \cos(2x - 6) + \pi$	$x \in (-4, 4)$	$\varepsilon = 10^{-10}$
11.	$f(x) = \ln(\sin(5x) + 3) - \ln(2.7)$	$x \in (-2, 2]$	$\varepsilon = 10^{-8}$
12.	$f(x) = e^{\sin(3x)} - \pi / 2$	$x \in (-3, 3)$	$\varepsilon = 10^{-6}$
13.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 17} - 5$	$x \in [-200, 200]$	$\varepsilon = 10^{-7}$
14.	$f(x) = x \cdot \sin(2x) / (x - 1) + 0.1$	$x \in (-\pi, \pi)$	$\varepsilon = 10^{-9}$
15.	$f(x) = \sqrt{x^2 + x^4 \cdot \sin^2(x)} - 4$	$x \in (-4, 4]$	$\varepsilon = 10^{-5}$
16.	$f(x) = \ln^2(2x^2 \cdot \sin^2(x)) - \sin(\pi / 4)$	$x \in (-\pi, 2\pi]$	$\varepsilon = 10^{-10}$
17.	$f(x) = e^{\cos(2x) \cdot \sin(5x)} - \cos(\pi / 20)$	$x \in (-\pi, \pi)$	$\varepsilon = 10^{-8}$
18.	$f(x) = e^{(x-1)} \cdot \sin(2x - 5) / (3x - 2)$	$x \in (-3, 3)$	$\varepsilon = 10^{-6}$
19.	$f(x) = e^{\cos(x) \cdot \sin(2x)} - \sin(\pi / 4)$	$x \in (-2\pi, 2\pi]$	$\varepsilon = 10^{-10}$
20.	$f(x) = x \cdot \sin^2(2x) / \cos^2(x + 3) + 0.67$	$x \in (-\pi, \pi)$	$\varepsilon = 10^{-8}$

**Практическая работа №2. Исследование функции.  
Варианты индивидуальных заданий**

Таблица 5

1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{2-x} + \ln(\pi)$	2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-2)(x-10)} + e^\pi$
3. $f(x) = 5 \cdot e^2 + \frac{x-4}{(x-2)(x+5)}$	4. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-8} - 3 \cdot \sqrt{\pi}$
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} \cdot \sin(x)}{x-3} - \pi^e$	6. $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-2x} + \sqrt{e}$
7. $f(x) = \frac{\sin(x)}{(x-3)(3+x)} - 2 \cdot \sin(e^2)$	8. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(6-x)} + 3 \cdot \cos(\sqrt{\pi})$
9. $f(x) = \frac{15}{(x-4) \cdot \sqrt{x+10}} - 4 \cdot \ln(e^\pi)$	10. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-2)(x-10)} - \sin(\sqrt{e^3})$
11. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-2)(x-8)(x-5)} - \cos(e)$	12. $f(x) = \frac{\sin(10x)}{x^2 \cdot \ln(x)} + \sqrt{e}$
13. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x-5} - 3 \cdot \ln(\pi^e)$	14. $f(x) = \frac{\ln(x)+x}{x-1} + \sin(\pi^2)$
15. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{(x-3)(x-8)} + 2 \cdot \ln(8 \cdot e)$	16. $f(x) = \frac{\ln(0.3x)}{3-x} + \sin(\ln(\pi))$
17. $f(x) = \frac{\sin(x)}{2-x} + \ln(4 \cdot \pi \cdot e)$	18. $f(x) = \frac{\sin(x-3)}{\ln(2-x)} - \sqrt{e \cdot \pi}$
19. $f(x) = \frac{x^2 \sin(2x)}{x-3} + \ln(\pi \cdot e)$	20. $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\ln(x)} - \sqrt{e^2 + \pi^2}$
21. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-3)^2} + \cos(\pi - e)$	22. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-2)(x-10)} - \sin(\pi + e)$
23. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \pi \cdot \sqrt{e}$	24. $f(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x-2)(x-5)} - \sin(2 \cdot e)$

**Практическая работа № 3 Матричные операции. Линейная алгебра**  
**Варианты индивидуальных заданий**

Таблица 6

1. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	2. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	3. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
4. разложить по 3 столбцу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	5. разложить по 2 столбцу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	6. разложить по 1 столбцу $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
7. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	8. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	9. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
10. разложить по 2 столбцу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	11. разложить по 3 столбцу $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	12. разложить по 4 столбцу $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
13. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	14. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$	15. разложить по 1 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
16. разложить по 3 столбцу $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	17. разложить по 4 столбцу $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$	18. разложить по 1 столбцу $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
19. разложить по 2 строке $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -8 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$	20. разложить по 3 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	21. разложить по 4 строке $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Таблица 7

№	<b>B</b> [ $m \times n$ ]	Способ задания матрицы	Операции с вектором $\bar{x}$	Операции с матрицей <b>C</b>	Действия с матрицей <b>B</b>	Вычисления с матрицей <b>D</b>
1.	4×7	функция <i>matrix</i>	$2\mathbf{B} \times \bar{x}$	$2\mathbf{B} + 3\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки 1-3, столбцы 2-6; присписать матрице <b>B</b> столбец в начало	найти максимальный элемент последней строки <b>D</b>
2.	8×5	ранжирование	$3\bar{x} \times \mathbf{B}$	$2\mathbf{C} + 3\mathbf{B}$	выписать первую строку матрицы <b>B</b> ; заменить в матрице <b>B</b> третью строку новой	найти сумму элементов первой строки <b>D</b>
3.	9×6	оператор цикла	$2\pi \cdot \mathbf{B} \times 7\bar{x}$	$2\mathbf{B} \times 3\mathbf{C}$	выписать второй столбец <b>B</b> ; вставить в матрицу <b>B</b> новый столбец после третьего	найти минимальный элемент второго столбца <b>D</b>
4.	10×4	чтение из файла	$0.3\bar{x} \times 4\mathbf{B}$	$2\mathbf{C} \times 3\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4 матрицы; вставить в <b>B</b> новую строку после второй	найти сумму элементов последнего столбца <b>D</b>
5.	11×5	функция <i>matrix</i>	$-\mathbf{B} \times 8.1\bar{x}$	$-11\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки все, столбцы 1-5; заменить в <b>B</b> второй столбец новым	найти минимальный элемент третьей строки <b>D</b>
6.	9×4	ранжирование	$3\pi \cdot \bar{x} \times 2\mathbf{B}$	$-7\mathbf{C} + 3.1\mathbf{B}$	выписать 1 и 3 строки матрицы <b>B</b> ; вставить в матрицу <b>B</b> новый столбец перед последним	найти произведение элементов последней строки <b>D</b>
7.	5×10	оператор цикла	$2.1\mathbf{B} \times 1.2\bar{x}$	$2\pi \cdot \mathbf{B} \times 0.1\mathbf{C}$	выписать подматрицу – столбцы 1-2; заменить в <b>B</b> четвертый столбец новым	найти максимальный элемент главной диагонали <b>D</b>
8.	8×6	чтение из файла	$1.3\bar{x} \times 3.1\mathbf{B}$	$-0.7\mathbf{C} \times 3.1\mathbf{B}$	выписать 2 и 4 столбцы матрицы <b>B</b> ; заменить в матрице <b>B</b> пятую строку новой	найти сумму элементов второго столбца <b>D</b>
9.	11×9	функция <i>matrix</i>	$27\mathbf{B} \times 0.27\bar{x}$	$0.2\mathbf{B} - 0.3\mathbf{C}$	выписать вторую строку и второй столбец; присписать матрице <b>B</b> столбец в конец	найти максимальный элемент второго столбца <b>D</b>
10.	6×7	ранжирование	$0.01\bar{x} \times 0.3\mathbf{B}$	$-21\mathbf{C} + 13\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 1-3, столбцы 2-6; присписать матрице <b>B</b> строку в конец	найти минимальный элемент предпоследней строки <b>D</b>
11.	5×8	оператор цикла	$12\mathbf{B} \times 0.01\bar{x}$	$-0.2\mathbf{B} \times 1.1\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строка 3, столбцы 0-3; вставить в <b>B</b> новый столбец после первого	найти произведение элементов первого столбца <b>D</b>
12.	7×9	чтение из файла	$3.7\bar{x} \times 7.3\mathbf{B}$	$0.1\mathbf{C} \times 10\mathbf{B}$	выписать подматрицу – строки 2-4, столбец 2; вставить в <b>B</b> новую строку после третьей	найти максимальный элемент предпоследнего столбца <b>D</b>
13.	4×12	ранжирование	$-0.2\mathbf{B} \times 9\bar{x}$	$0.2\mathbf{C} + 0.2\mathbf{B}$	выписать 2 строку и последний столбец <b>B</b> ; вставить в <b>B</b> новую строку перед последней	найти сумму элементов третьей строки <b>D</b>
14.	6×8	оператор цикла	$9\bar{x} \times 9\mathbf{B}$	$-2\mathbf{B} \times 3.6\mathbf{C}$	выписать подматрицу – строки 2-3, столбцы 2-3; присписать матрице <b>B</b> строку в начало	найти максимальный элемент первой строки <b>D</b>
15.	3×11	чтение из файла	$1.2\mathbf{B} \times 1.2\bar{x}$	$-0.2\mathbf{C} \times 5\mathbf{B}$	выписать первую строку и первый столбец <b>B</b> ; вставить в <b>B</b> новую строку перед первой	найти произведение элементов главной диагонали <b>D</b>

**Практическая работа № 4 Операции с векторами**  
**Варианты индивидуальных заданий**

Таблица 8

№	Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$	Матрица A
1.	$\vec{a} = (1, 2, 4) \quad \vec{b} = (7, -1, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2.	$\vec{a} = (5, 0, 2) \quad \vec{b} = (-3, 2, -1)$	$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
3.	$\vec{a} = (11, 22, 33) \quad \vec{b} = (33, -22, 11)$	$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
4.	$\vec{a} = (8, 0, 8) \quad \vec{b} = (0, 7, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\vec{a} = (3, 21, 24) \quad \vec{b} = (26, -13, 13)$	$A := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$
6.	$\vec{a} = (5, 0, 4) \quad \vec{b} = (-1, -2, -1)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\vec{a} = (7, 5, 2) \quad \vec{b} = (-31, 23, -10)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
8.	$\vec{a} = (0, 1, 0) \quad \vec{b} = (13, -13, 13)$	$A := \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
9.	$\vec{a} = (1, 2, 1) \quad \vec{b} = (3, -1, -1)$	$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\vec{a} = (2, 2, 0) \quad \vec{b} = (1, -1, 2)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
11.	$\vec{a} = (-3, 1, 3) \quad \vec{b} = (0, -1, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
12.	$\vec{a} = (1, 1, 3) \quad \vec{b} = (3, -1, -1)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

13.	$\bar{a} = (7, -15, 0.5) \quad \bar{b} = (0, 12, -10)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$
14.	$\bar{a} = (-1, 2, -1) \quad \bar{b} = (-3, -1, 5)$	$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\bar{a} = (-5, 5, 4) \quad \bar{b} = (17, 1, -1)$	$A := \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 \\ -11 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
16.	$\bar{a} = (5, -1, 2) \quad \bar{b} = (0, 2, -1)$	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$\bar{a} = (-11, -12, 13) \quad \bar{b} = (11, -13, 12)$	$A := \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
18.	$\bar{a} = (2, 0, -6) \quad \bar{b} = (7, -1, -10)$	$A := \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 \\ -1 & 20 & 3 \\ -5 & 50 & -1 \end{pmatrix}$
19.	$\bar{a} = (2, 2, 2) \quad \bar{b} = (71, 23, -101)$	$A := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
20.	$\bar{a} = (1, 2, 1) \quad \bar{b} = (-1, -1, 1)$	$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 13 & 3 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
21.	$\bar{a} = (2, 2, 0) \quad \bar{b} = (1, -1, 2)$	$A := \begin{pmatrix} -21 & -7 & 13 \\ -1 & 12 & 3 \\ -5 & 17 & -1 \end{pmatrix}$
22.	$\bar{a} = (8, 0, 8) \quad \bar{b} = (0, 7, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -1 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
23.	$\bar{a} = (-3, 1, 3) \quad \bar{b} = (0, -1, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 6 & 6 \\ -6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
24.	$\bar{a} = (8, 0, 8) \quad \bar{b} = (0, 7, 0)$	$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 8 & 10 \\ -10 & 7 & -1 \end{pmatrix}$



**Практическая работа №5. Системы линейных алгебраических уравнений**  
**Варианты индивидуальных заданий**

Таблица 9

1. $\begin{cases} 3z - 3y = -12 \\ x + 4y + 5z = 15 \\ x + 4z = -1 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 2 \cdot x - 3y - z = -8 \\ x + 4y = 13 \\ 3x + 3z = 6 \end{cases}$	3. $\begin{cases} z - 2x = 1 \\ 3x - 2y = 6 \\ 2x - 2y - 2z = -6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4y - 2x - 2z = 18 \\ 4x - 2y + 3z = -13 \\ 2y - x + 3z = 13 \end{cases}$	5. $\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 18 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 4y - 3x - z = 2 \\ x - 2 \cdot y + 3z = 4 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -2x - 3z = -4 \\ 5y - 3x + 4z = 11 \end{cases}$	8. $\begin{cases} y + 4z = 12 \\ 2x + y - 2z = -4 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -2y + 3z = 0 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$
10. $\begin{cases} -2x - z = 4 \\ 4y - 2x + 2z = 2 \\ 4z - x - 3y = -10 \end{cases}$	11. $\begin{cases} -3x - 2y + z = -6 \\ 4y - 2z = 24 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}$	12. $\begin{cases} y - 3x + 2z = -14 \\ -2x - 3z = -10 \\ 3 \cdot x + y + 4z = 16 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19 \\ 2x - y + 4z = 13 \\ 2y - 3z = -10 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2y - 2z = 12 \\ -2x + 2y = 12 \\ 5x - 2y + 4z = -26 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 5y + 3z = 22 \\ 4y - 2x + z = 4 \\ y + z - 3x = -6 \end{cases}$	17. $\begin{cases} -2x - z = 4 \\ 4y - 2x + 2z = 2 \\ 4z - x - 3y = -10 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x + y = -8 \\ 2x + z = -4 \\ 2x + y + 2z = -6 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 5z - 3x - 3y = -13 \\ 4x - y = 14 \\ 2x + z = 9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} y - 2x - z = 0 \\ 2x + y = 7 \\ 3x + 2y + 4z = 25 \end{cases}$	21. $\begin{cases} y - 3x + 2z = -14 \\ -2x - 3z = -10 \\ 3x + y + 4z = 16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19 \\ 2x - y + 4z = 13 \\ 2x - 3z = -10 \end{cases}$	23. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 5y + 3z = 22 \\ 4y - 2x + z = 4 \\ y - 3x + z = -6 \end{cases}$

Таблица 10

1. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 19 \\ x + 5z = 21 \\ 7x - 4y + 13z = 59 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 5y + 3z = 8 \\ -2x + 4y + z = 11 \\ -2x + 14y + 7z = 27 \end{cases}$	3. $\begin{cases} -2x + 5y - 2z = 10 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ -7x + 11y - 2z = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 35 \\ 5x + y = 23 \\ 11x + 3y + 8z = 93 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 13 \\ 2y - 3z = -10 \\ 4x + 5z = 16 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2y - 2z = 4 \\ 2x + 8y - 6z = 12 \end{cases}$
7. $\begin{cases} -x - 3y + 4z = -6 \\ -x + y - 2z = -2 \\ -3x - 5y + 6z = -14 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x + z = -4 \\ 2x + y + 2z = -6 \\ 6x + y + 4z = -14 \end{cases}$	9. $\begin{cases} -3x - 3y + 5z = -1 \\ 4x - y = 8 \\ -2x - 7y + 10z = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -3x - 2y + 4z = -19 \\ 3x + z = 13 \\ -3x - 4y + 9z = -25 \end{cases}$	11. $\begin{cases} 5x - 3y - 3z = -21 \\ -2x + 4y + 3z = 15 \\ 8x - 2y - 3z = -27 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4x + 4y + 2z = -10 \\ x - 2y + 3z = -16 \\ 9x + 6y + 7z = -36 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 5x - y + 5z = 15 \\ -x - z = -4 \\ 9x - 2y + 9z = 26 \end{cases}$	14. $\begin{cases} -3x - 2y + 3z = 0 \\ -x - 3y - 2z = 13 \\ -7x - 7y + 4z = 13 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 9 \\ 6x - 3y + 12z = 9 \end{cases}$
16. $\begin{cases} -3x + 4y = -5 \\ 2x + 4y + z = 11 \\ -4x + 12y + z = 1 \end{cases}$	17. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 4y + 3z = 25 \\ 7x - 2y + 3z = 35 \end{cases}$	18. $\begin{cases} -3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = -25 \\ -4x + 4y - 9z = -25 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 7 \\ 3x + 3y + 2z = 11 \\ 7x + 13y - 2z = 25 \end{cases}$	20. $\begin{cases} -3y - 3z = -24 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \\ 3x - 8y - 4z = -44 \end{cases}$	21. $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 14 \\ -2x + 4z = -12 \\ -4x + 8y = 16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} -x + 4y + 4z = 4 \\ -3x - 2y = -14 \\ -5x + 6y + 8z = -6 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x + 5z = 15 \\ 5x + y = 4 \\ 7x + y + 10z = 34 \end{cases}$	24. $\begin{cases} x - y + 4z = -5 \\ 4y - 2z = -6 \\ 2x + 2y + 6z = -16 \end{cases}$

**Практическая работа №6. Комплексные вычисления**  
**Варианты индивидуальных заданий.**

Таблица 11

№	$A \subset \square$	$w = \psi(z)$
1.	$z_k = \frac{2}{k} - i \cdot 3k, k = 1..10$	$\frac{3 \cdot z + i}{2i \cdot z + 3}$
2.	$z_k = 3 \cdot e^{2ik}, k = 1..10$	$3iz + 4z + 1 - i$
3.	$ z_k  = 2k, \arg(z_k) = \pi/3, k = 1..10$	$2i \cdot \sin(z)$
4.	Луч $\arg(z) = 4\pi/3,  z  \geq 0$	$\operatorname{tg}(3iz + 4z)$
5.	$\operatorname{Re}(z_k) = k, \operatorname{Im}(z_k) = 1, k = -10..10$	$e^{2z-2i}$
6.	Прямая $\operatorname{Re}(z) = 3$	$\ln(iz)$
7.	$z_k = 3 \cos(\pi k/7) - 3i \sin(\pi k/7), k = 1..6$	$z^3 + 2i$
8.	Окружность $ z  = 3$	$3i \cdot \cos(z)$
9.	$z_k = 0.5k - i \cdot 3, k = 2..12$	$e^{-3iz}$
10.	$z_k = 4k \cdot e^{-3i}, k = 1..5$	$\operatorname{ctg}((3i + 3)z)$
11.	$ z_k  = 5, \arg(z_k) = \pi k/3, k = 1..10$	$\frac{3 + 3i}{3 \cdot z + 3}$
12.	$z_k = 3k \cos(\pi/5) - 3ki \sin(\pi/5), k = 1..6$	$(2i + 1) \cdot \sin(z)$
13.	$\operatorname{Re}(z_k) = 1, \operatorname{Im}(z_k) = 0.2k, k = -5..5$	$3z^{3i} + 3i$
14.	Прямая $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$	$2i \cdot \ln(z)$
15.	Парабола $\operatorname{Re}(z) = (\operatorname{Im}(z)^2 - 1)/2$	$z^{-i} + z^i$
16.	$ z_k  = k, \arg(z_k) = \pi k/4, k = 1..10$	$2i \cdot e^{-2z}$
17.	Окружность $ z - 2  =  1 - 2\bar{z} $	$\operatorname{th}(z + 4)$
18.	$z_k = 0.1k \cdot e^{0.1ik}, k = 1..10$	$-2i \cdot \cos(z)$
19.	Гипербола $\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) = -1$	$2z - 2iz + 1 + i$
20.	$z_k = 2k(\cos(\pi k/4) - i \sin(\pi k/4)), k = 1..8$	$\frac{3i \cdot z + 3}{2i \cdot z + 2}$
21.	$\operatorname{Re}(z_k) = 5 - k, \operatorname{Im}(z_k) = 2k, k = 0..5$	$ e^z  \cdot \sin(iz)$
22.	Парабола $ z  = \operatorname{Re}(1 + z)$	$2i \cdot \operatorname{sh}(z) - 2i \cdot \operatorname{ch}(z)$
23.	$z_k = 10 - i \cdot 5k, k = 2..8$	$\operatorname{cth}(3iz)$
24.	Круг $ z  \leq 5$	$\sin(2z) + \sin(-2iz)$
25.	$z_k = 1.2 \cdot k \cdot e^{1.2 \cdot ki}, k \in \square$	$3z + iz - i$

**Практическая работа №7. Символьные вычисления на MathCAD**  
**Варианты индивидуальных заданий.**

Таблица 12

1) $\frac{2 \cdot x^3 - x^2 + 10 \cdot x + 29}{x^4 + 6 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 13}$	2) $\frac{18 \cdot x^2 + 34 \cdot x + 297}{x^3 - x^2 - 24 \cdot x - 126}$	3) $\frac{3 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 2}{x^4 + 8 \cdot x^3 + 30 \cdot x^2 + 56 \cdot x + 65}$
4) $\frac{8 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 - 33 \cdot x + 1}{8 \cdot x^4 - 32 \cdot x^3 + 22 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 6}$	5) $\frac{2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 44 \cdot x + 147}{x^4 + 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 54 \cdot x - 54}$	6) $\frac{2 \cdot x^2 + 11 \cdot x}{x^3 - x^2 - 4 \cdot x - 6}$
7) $\frac{2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 7}{x^4 + 6 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 40}$	8) $\frac{2 \cdot x^3 + x^2 + 20 \cdot x + 37}{x^4 - 2 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 15}$	9) $\frac{x^3 - 30 \cdot x^2 - 148 \cdot x - 567}{x^4 + x^3 - 3 \cdot x^2 - 55 \cdot x - 52}$
10) $\frac{5 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + 44 \cdot x - 22}{x^4 + 6 \cdot x^3 + 26 \cdot x^2 + 56 \cdot x + 80}$	11) $\frac{10 \cdot x^2 - 35 \cdot x + 69}{x^3 - 2 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 78}$	12) $\frac{7 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 23 \cdot x - 1}{6 \cdot x^4 - 25 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 + x - 3}$
13) $\frac{5 \cdot x^3 + 13 \cdot x^2 - 53 \cdot x - 43}{6 \cdot x^4 - 43 \cdot x^3 + 78 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 12}$	14) $\frac{11 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 97}{x^3 - 23 \cdot x - 78}$	15) $\frac{2 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 3}{x^3 - 5 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 35}$
16) $\frac{3 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 - 121 \cdot x + 64}{x^4 - 7 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 12}$	17) $\frac{6 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 27 \cdot x - 8}{x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 - 26 \cdot x - 24}$	18) $\frac{9 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 83}{x^3 - 3 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 56}$
19) $\frac{4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 48 \cdot x + 8}{x^4 + 4 \cdot x^3 + 22 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 117}$	20) $\frac{4 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 84}{x^4 - 5 \cdot x^3 - x^2 + 17 \cdot x + 12}$	21) $\frac{3 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 19 \cdot x - 12}{x^4 + 2 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 18}$
22) $\frac{5 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 62 \cdot x + 16}{x^4 + 6 \cdot x^3 + 31 \cdot x^2 + 66 \cdot x + 130}$	23) $\frac{3 \cdot x^3 + 17 \cdot x^2 + 19 \cdot x - 5}{x^3 + x^2 - 7 \cdot x - 15}$	24) $\frac{8 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 54 \cdot x + 140}{x^4 - 15 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 24}$

**Практическая работа № 8. Интерполяция и регрессия**  
**Варианты индивидуальных заданий.**

Таблица 13

№	$n$	степень регрессионного полинома $q$	$m \times m$	вид двумерной интерполяции	тип регрессии
1.	7	7	5×5	<i>lspline</i>	<i>expfit</i>
2.	8	6	6×6	<i>pspline</i>	<i>igsfit</i>
3.	9	5	7×7	<i>cspline</i>	<i>sinfit</i>
4.	10	7	8×8	<i>bspline</i>	<i>pwfit</i>
5.	11	8	5×5	<i>linterp</i>	<i>logfit</i>
6.	12	9	6×6	<i>lspline</i>	<i>lnfit</i>
7.	7	6	7×7	<i>pspline</i>	<i>regress</i>
8.	8	7	8×8	<i>cspline</i>	<i>loess</i>
9.	9	8	5×5	<i>bspline</i>	<i>expfit</i>
10.	10	9	6×6	<i>linterp</i>	<i>igsfit</i>
11.	11	8	7×7	<i>lspline</i>	<i>sinfit</i>
12.	12	7	8×8	<i>pspline</i>	<i>pwfit</i>
13.	7	3	5×5	<i>cspline</i>	<i>logfit</i>
14.	8	5	6×6	<i>bspline</i>	<i>lnfit</i>
15.	9	4	7×7	<i>linterp</i>	<i>regress</i>
16.	10	5	8×8	<i>lspline</i>	<i>loess</i>
17.	11	6	5×5	<i>pspline</i>	<i>expfit</i>
18.	12	7	6×6	<i>cspline</i>	<i>igsfit</i>
19.	7	4	7×7	<i>bspline</i>	<i>sinfit</i>
20.	8	5	8×8	<i>linterp</i>	<i>pwfit</i>
21.	9	3	5×5	<i>lspline</i>	<i>logfit</i>
22.	10	8	6×6	<i>pspline</i>	<i>lnfit</i>
23.	11	9	7×7	<i>cspline</i>	<i>regress</i>
24.	12	5	8×8	<i>bspline</i>	<i>loess</i>

© Михальченко С.Г., 2016  
© Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2016



