Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра промышленной электроники (ПрЭ)

Михальченко С. Г.

Информационные технологии. Часть 2. Профессиональные математические пакеты

Лабораторный практикум

ТОМСК 2017

Михальченко С.Г.

Информационные технологии. Часть 2. Профессиональные математические пакеты. Лабораторный практикум / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники – Томск: ТУСУР, 2017. – 84 с.: ил., табл., прил. – Библиогр.: с. 65.

Настоящее руководство имеет целью получение профессиональных компетенций в области применения математических пакетов для научно-исследовательских и инженерных вычислений. Курс базируется на изучении программного пакета *MathCAD* и применении полученных знаний в различных видах деятельности (инженерной, научно–исследовательской, управленческой, и др.).

Руководство может быть использовано для проведения лабораторных работ как аудиторно, так и в режиме самоподготовки.

Наличие вариантов индивидуальных заданий позволяет использовать настоящее руководство для проведения контрольных работ и итогового тестирования.

Для освоения дисциплины «*Профессиональные математические пакеты*» достаточно знаний, полученных студентом в школьных курсах математики, информатики и физики.

Настоящее учебное пособие может применяться для обучения студентов по дисциплинам *«Профессиональные математические пакеты»*, «*Инженерные расчеты в MathCAD*» и «*Линейная алгебра и аналитическая геометрия*».

© Михальченко С.Г., 2017
© Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **5**

1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MATHCAD **6**

1.1. Интерфейс математического процессора MathCAD 6
1.2. Инструментальные панели и шаблоны 8
1.3. Операторы определения объектов и индикации значений 9

2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD **13**

2.1. Применение пакета MathCAD 13
2.2. Вывод графиков в MathCAD 14
2.3. Алгоритмические возможности MathCAD 16
2.4. Аналоговая модуляция 19
2.5. Лабораторная работа №1. Программирование в MathCAD 21

3. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATHCAD **22**

3.1. Матричные операции MathCAD 22
3.2. Векторная геометрия 27
3.3. Сила Лоренца в электромагнитном поле 30
3.4. Лабораторная работа №2. Расчет силы Лоренца в электромагнитном поле 32

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ **33**

4.1. Метод Гаусса 33
4.2. Правило Крамера 34
4.3. СЛАУ вырожденный случай 35

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА. **37**

5.1. Закон Ома. Законы Кирхгофа 37
5.2. Лабораторная работа №3. Расчет цепи постоянного тока 40

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ **41**

6.1. Теория чисел. Краткий обзор. 41
6.2. Комплексные числа 41
6.3. Операции над комплексными числами 43
6.4. Понятие комплексных функций 43
6.5. Лабораторная работа №4. Комплексные вычисления 46

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА **47**

7.1. Активные и реактивные элементы цепи переменного тока 47
7.2. Полная мощность цепи переменного тока 50
7.3. Расчет электрической цепи синусоидального переменного тока 50
7.4. Лабораторная работа № 5. Расчет цепи переменного тока 55

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **56**

8.1. Численные методы решения ОДУ 57
8.2. Переходный процесс в электрической схеме 60
8.3. Лабораторная работа № 6. Переходный процесс в электрической схеме 63

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **64**

ЛИТЕРАТУРА **65**

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная, или, как еще говорят, ***компьютерная математика*** либо ***компьютерная алгебра***, – это большой раздел математического моделирования. В принципе, программы такого рода можно отнести к *инженерным программам автоматизированного проектирования*. Таким образом, в области инженерного проектирования выделяют три основных раздела:

- CAD — Computer Aided Design (проектирование);
- CAM — Computer Aided Manufacturing (производство);
- CAE — Computer Aided Engineering (инженерные расчеты).

Сегодня серьезное конструирование, градостроительство и архитектура, электротехника и масса смежных с ними отраслей, а также учебные заведения технической направленности уже не могут обойтись без *CAD\CAM\CAE* – систем (систем автоматизированного проектирования – *САПР*), производства и расчетов. А математические пакеты являются составной частью мира *CAE*-систем, но эта часть никак не может считаться второстепенной, поскольку некоторые задачи вообще невозможно решить без помощи компьютера. Более того, к системам вычислительной математики сегодня прибегают даже математики-теоретики, например для проверки своих гипотез.

В настоящее время в ***математических пакетах*** применяется ***принцип конструирования модели,*** а не традиционное искусство программирования. То есть пользователь лишь ставит задачу, а методы и алгоритмы решения система находит сама. Такие рутинные операции, как раскрывание скобок, преобразование выражений, нахождение корней уравнений, производных и неопределенных интегралов компьютер самостоятельно осуществляет в символьном виде, причем практически без вмешательства пользователя.

Современные математические пакеты можно использовать и как обычный калькулятор, и как средства для упрощения выражений при решении каких-либо прикладных задач.

В настоящее время практически все современные *CAE*-программы имеют встроенные функции *символьных вычислений*. Однако наиболее известными и приспособленными для математических символьных вычислений считаются *Mathematica* [1], *Maple* [2], *MatLab* [3], и *MathCAD* [4].

1. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MATHCAD

В отличие от мощных и ориентированных на высокоэффективные вычисления программных пакетов, описанных выше, программа *MathCAD* – это, скорее, простой, но продвинутый редактор математических текстов с широкими возможностями символьных вычислений и прекрасным интерфейсом.

MathCAD [4] был задуман и первоначально написан *Алленом Раздовом* из Массачусетского технологического института (*MIT*), соучредителем компании *Mathsoft* [http://www.mathsoft.com/], которая с 2006 г. является частью корпорации *PTC* [http://communities.ptc.com] (*Parametric Technology Corporation*).

MathCAD не имеет языка программирования как такового, а ядро символьных вычислений заимствовано из пакета *Maple*. Некоторые из математических возможностей *MathCAD* (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры *Maple* (*MKM, Maple Kernel Mathsoft).* Начиная с 14 версии — использует символьное ядро *MuPAD*.

Зато интерфейс программы *MathCAD* очень простой, а возможности визуализации богатые. Все вычисления здесь осуществляются на уровне визуальной записи выражений в общеупотребительной математической форме. Пакет имеет хорошие подсказки, подробную документацию, функцию обучения использованию, целый ряд дополнительных модулей и приличную техническую поддержку производителя. Однако пока математические возможности *MathCAD* в области компьютерной алгебры намного уступают системам *Maple, Mathematica, MatLab*. Однако по программе *MathCAD* выпущено много книг и обучающих курсов, в том числе у нас в России. Сегодня эта система стала буквально международным стандартом для прикладных технических вычислений.

1.1. Интерфейс математического процессора MathCAD

Программный комплекс ***MathCAD*** (*Mathematical Computer Aided Design* – математическое автоматизированное проектирование) предназначен для автоматизации решений широкого круга задач, связанных с математическими расчетами. Это многофункциональная вычислительная среда, снабженная дружественным, во многом интуитивно понятным графическим интерфейсом.

MathCAD имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов.

При запуске *MathCAD* на экране появляется окно интерфейса (*Рис. 1*).

Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов-приложений используется принцип *WYSIWYG* (*What You See Is What You Get* – что видишь, то и получаешь).

Рабочий лист и регионы

В поле основного окна отображается продолжаемый вправо и вниз бесконечный рабочий лист (*worksheet*). На рабочем листе в произвольном порядке располагаются ***регионы***. Существует три типа регионов:

- математические,
- графические,
- текстовые.

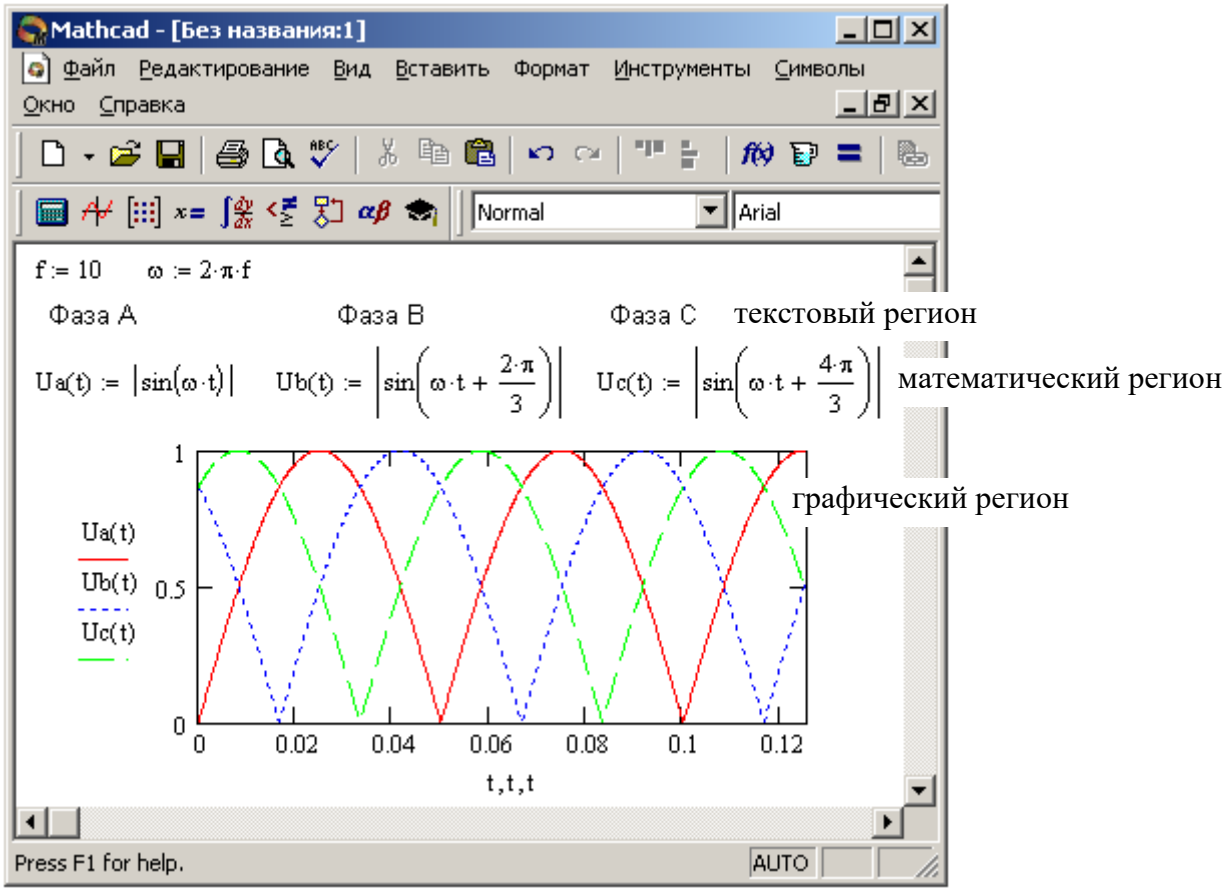


Рис. 1 – Окно интерфейса MathCAD с загруженным документом

Математические регионы содержат формульные выражения, операторы назначения и индикации результатов. С математическими регионами связаны вычислительные модули – участки исполняемого кода. Преобразование входной информации, занесенной в математический регион, в реализуемый код выполняется ***интерпретатором*** *MathCAD*. В отличие от компиляторов, выполняющих просмотр текста программы целиком, интерпретатор обрабатывает каждый регион в отдельности, что, собственно, и дает возможность использовать *MathCAD* как мощный калькулятор для разовых вычислений. Последовательность обработки математических регионов – *слева направо и сверху вниз* по рабочему листу. К моменту выполнения математического региона все объекты, участвующие в его выражениях, должны быть определены либо непосредственно в этом регионе, либо в предшествующих по времени выполнения регионах. Для удобства ввода информации в математические регионы в *MathCAD* широко используется система шаблонов.

Текстовые регионы содержат комментирующий текст и служат для оформления рабочего листа как удобочитаемого документа. Поскольку никакой исполнительный код с текстовыми регионами не связывается, их расположение на рабочем листе ничем не регламентировано. В текстовые регионы можно помещать изображения.

Графические регионы предназначены для вывода информации в виде графиков и изображений. Для программирования графического региона также применяются шаблоны.

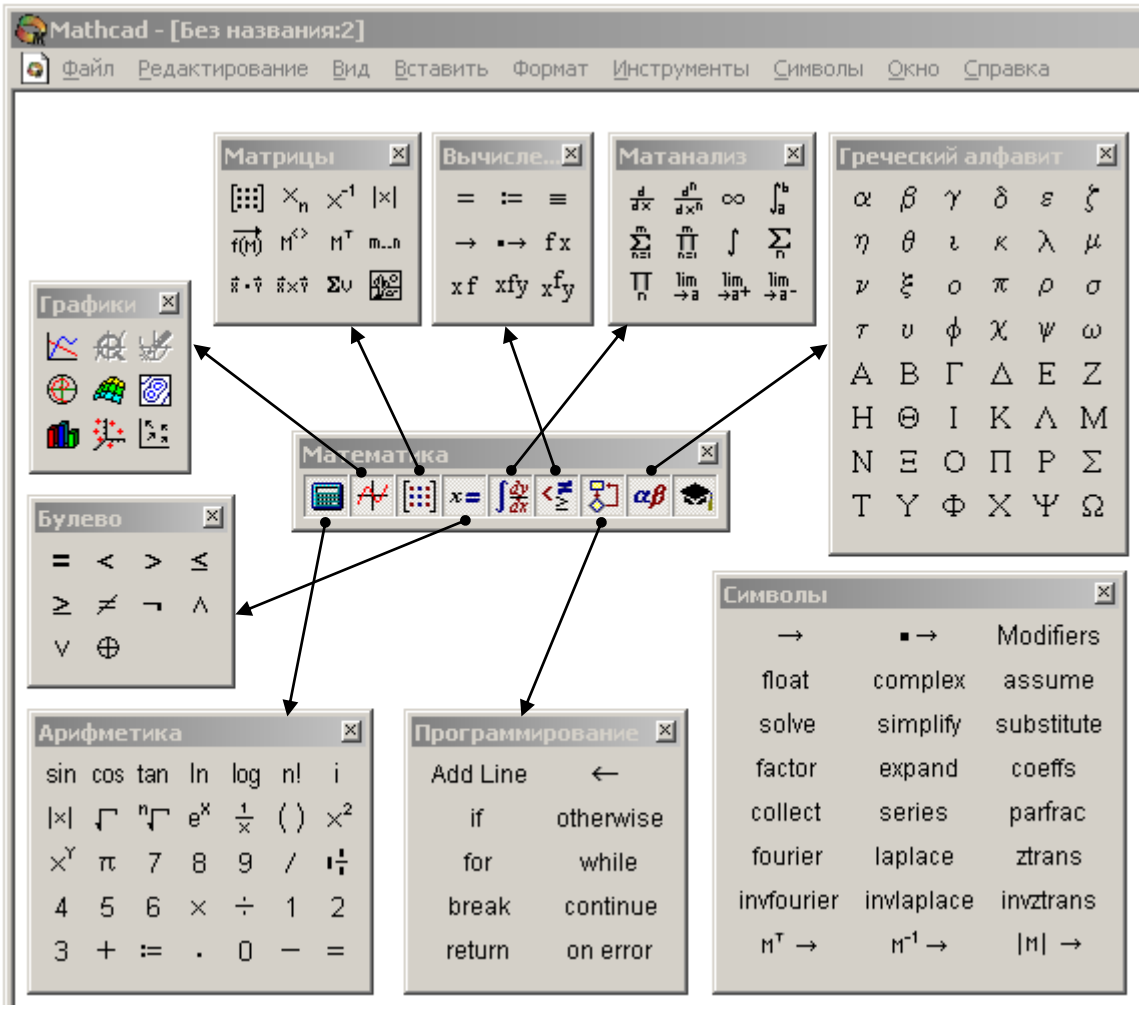
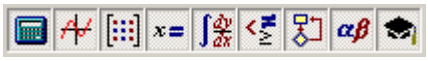


Рис. 2 – Панели инструментов и линейка их вызова

1.2. Инструментальные панели и шаблоны

Интерфейс *MathCAD* предоставляет пользователю представительный набор шаблонов для программирования математических и графических регионов. Для вызова шаблонов и занесения специфических символов операций используются инструментальные панели с виртуальными кнопками или «горячие» клавиши – акселераторы.

Панели инструментов объединены в 9 тематических групп (палитр). Каждая группа может быть вызвана на экран из *линейки вызова палитр*: – она же *панель «Математика»*.



Соответствие кнопок линейки вызываемым панелям показано на *Рис. 2*.

Всего на инструментальных панелях представлено 169 позиций, воздействие на которые вызывает вставку определенного шаблона или символа в точку расположения курсора на рабочем листе. Как видно из *Рис. 2*, некоторые позиции дублируются, присутствуя на разных панелях, некоторые предназначены для вставки обычных символов, имеющихся на клавиатуре, так что более удобно вводить непосредственным набором с клавиатуры, нежели через панель инструментов. Назначение ряда инструментов очевидно из соответствующих пиктограмм и не требует пояснений.

Здесь мы рассмотрим лишь те инструменты, применение которых необходимо для выполнения заданий лабораторных работ, информацию обо всех инструментах можно получить, воспользовавшись справочной системой *MathCAD*, вызываемой нажатием кнопки <*F1*> или из основного меню.

В составе пакета *MathCAD* имеется достаточно обширный набор встроенных функций. Вставка встроенных функций на рабочий лист может быть выполнена двумя путями:

• набором имени функции на клавиатуре – «горячих клавиш»;

• выбором функции из списка в окне диалога, открывающегося после воздействия на элемент управления с пиктограммой: f(x)

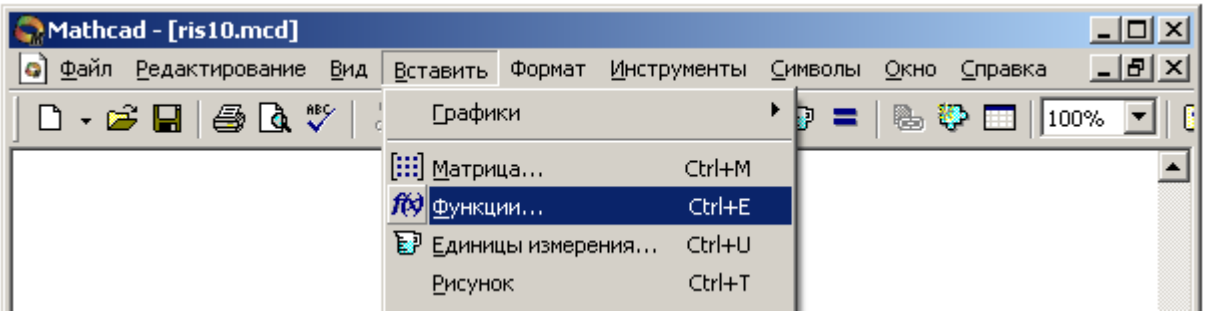


Рис. 3 – Панель вызова набора встроенных функций

Второй вариант представляется более удобным, так как на рабочий лист помещается шаблон функции с правильным названием и шаблоном списка параметров. Кроме того, в открывающемся окне диалога выбора функции имеется кнопка вызова контекстно-зависимой справки (<*Ctrl-F1*>).

Таблица 1 – Инструменты и клавиши быстрого вызова

Описание операции	*Пиктограмма*	*Клавиши*	*Панель*
Извлечение квадратного корня	$\sqrt{\ }$	\	Calculator
Возведение в степень	x^Y	Shift+6	Calculator
Ввод матрицы или вектора	[::]	Ctrl+M	Matrix
Ввод индекса (в элементах массива)	x_n	[	Matrix
Определитель, модуль, абсолютное значение	$\lvert x \rvert$	|	Matrix
Выделение столбца матрицы	$M^{<>}$	Ctrl+6	Matrix
Создание ранжированной переменной	m..n	;	Matrix
Векторизация функции	$\overrightarrow{f(M)}$	Ctrl+ –	Matrix
Оператор назначения – присваивания	:=	:	Evaluation
Оператор глобального назначения	≡	~	Evaluation
Индикация значения в символьной форме	→	Ctrl+.	Evaluation
График в прямоугольных координатах		Shift+2	Graph

1.3. Операторы определения объектов и индикации значений

Операторы определения (*присваивания, назначения*) объектов размещаются в математических регионах и выполняют три функции:

- создают объект, связывая с ним его имя – идентификатор;
- определяют тип объекта;
- инициализируют (задают) объект значением.

В качестве определяемого объекта могут выступать *переменные и функции. Листинг 1* демонстрирует примеры применения операторов определения объектов различного типа: вещественного числа ***a***, векторов ***b*** и ***c***, матрицы ***A*** и функции ***z(x).***

Листинг 1. Операторы определения и индикации

$a := 17 \quad b := (1\ \ 2\ \ 3)$

$a = 17 \quad b = (1\ \ 2\ \ 3)$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$

$z(x) := \mathrm{Re}(x) + i \cdot \mathrm{Im}(x) \qquad z(x) \rightarrow x \qquad z(3 - i) = 3 - i$

Тип объекта, соответствующего тому или иному имени-идентификатору, определяется типом правой части. Далее любые операции с объектом интерпретируются в соответствии с его определенным типом.

В примере (*Листинг 1*) определена функция ***z(x)***, которая получает в качестве аргумента комплексное число ***x*** и возвращает в качестве значения комплексно-сопряженное число. Функция, задаваемая подобным образом, называется *функцией, определяемой пользователем.* В скобках после имени функции находится список *формальных параметров*. В рассмотренном примере этот список состоит из единственной переменной ***x***. При вызове – применении этой функции формальные параметры заменяются фактическими. До вызова функции, переменные, перечисленные в списке формальных параметров, будут оставаться неопределенными.

Тип объекта, возвращаемого функцией, т.е. связанного с ее именем, определяется по контексту определения точно так же, как это происходит при определении переменной. Например, ***sin(x)*** возвращает вещественное число, а |***x***| – целое число.

В составе определения функции могут присутствовать переменные, не передаваемые через список формальных параметров. В этом случае такие переменные должны быть определены до оператора назначения функции. Необходимо отметить, что передача параметров через глобальные переменные в общем случае нежелательна, т.к. нарушает изолированность функции и может служить источником трудно обнаруживаемых ошибок.

Виды операторов определения MathCAD

Операторы назначения в *MathCAD* имеют три разновидности:

- **:=** оператор назначения (стандартный);
- ≡ оператор глобального назначения;
- ← оператор локального назначения в блоке.

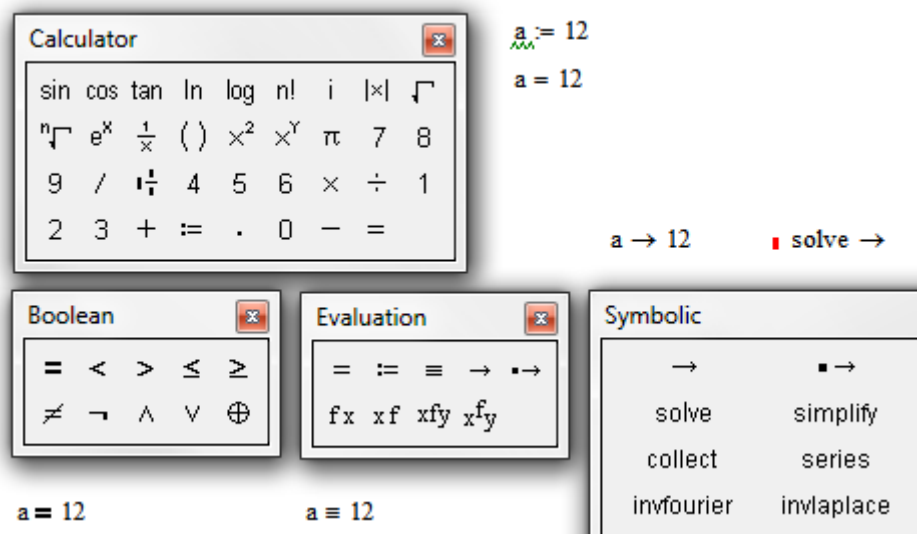


Рис. 4 – Области действия (видимости) операторов назначения

Все три разновидности операторов, помимо операции присваивания значения правого операнда левому, выполняют *передачу типа* левому операнду.

Оператор **:=** связывает значение и тип объекта с его идентификатором во всех регионах, выполняемых после региона, содержащего этот оператор.

Оператор **≡** действует на все регионы рабочего листа независимо от их расположения относительно региона, содержащего этот оператор.

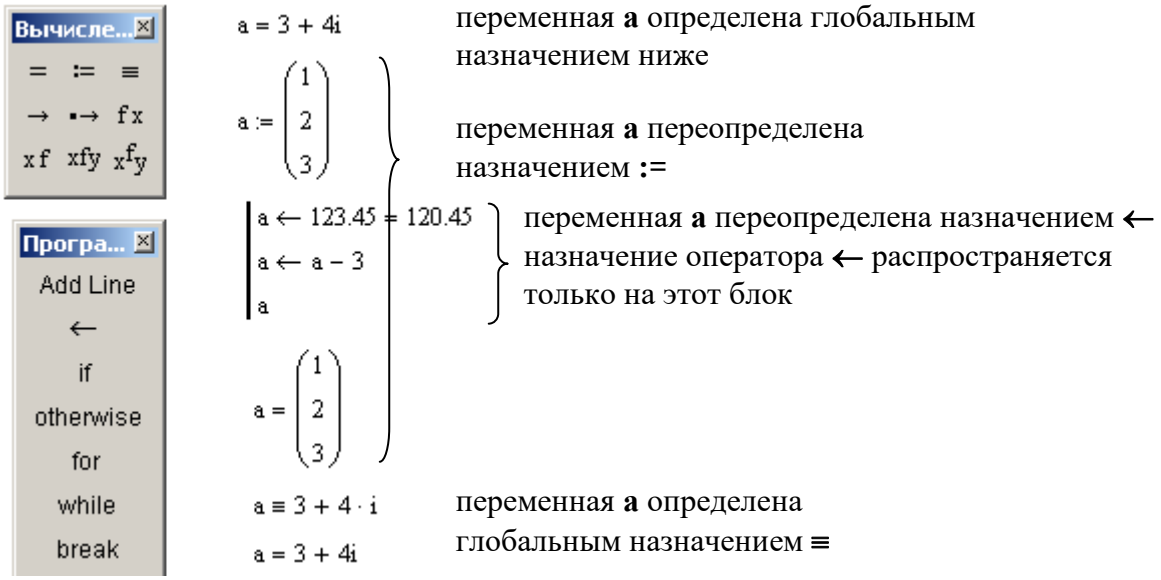


Рис. 5 – Области действия (видимости) операторов назначения

Оператор ← предназначен для использования в изолированных блоках, формируемых при программировании в пределах одного региона. Действие этого оператора распространяется только на тот регион, в котором он расположен. На *Рис. 5* показан пример переопределения типа и значения объекта ***a***.

Действие оператора глобального назначения ≡ распространяется на все пространство рабочего листа. Появление в регионе оператора назначения **:=** вызывает переопределение типа объекта, сохраняющееся до появления следующего оператора назначения, которым может быть либо еще один оператор :=, либо (как в примере) оператор глобального назначения ≡.

Оператор локального назначения ← не оказывает никакого действия на тип и значение объекта **a** за пределами блока, выделенного слева жирной вертикальной чертой. Такие блоки создаются при использовании инструментальной *панели «Программирование»* и занимают один регион.

Определенные однажды объекты могут быть переопределены в последующих регионах. Таким образом, при интерпретации действий с объектом актуально последнее, ближайшее к точке выполнения определение его типа. Если на рабочем листе есть несколько операторов глобального назначения ≡, то свойство «глобальности» сохраняет только последний из них.

MathCAD содержит несколько сотен встроенных стандартных функций, которые можно использовать в расчетах. Для вставки функции нужно нажать пиктограмму или в меню выбрать опцию «*Вставить Функцию*» – откроется окно выбора (*Рис. 6*), где все функции размещены по категориям.

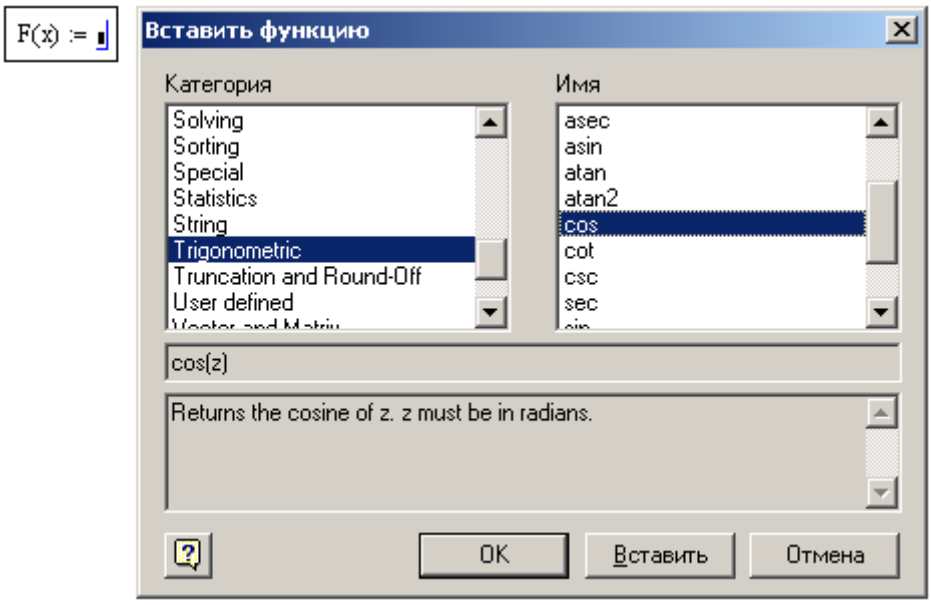


Рис. 6 – Диалоговое окно выбора стандартной функции из библиотеки

Операторы индикации значений

Весьма часто при выполнении вычислений требуется выводить на экран значения того или иного объекта, либо результата выполнения выражения. Эта задача решается *операторами индикации значений*. В *MathCAD* существуют два вида операторов индикации:

- = оператор индикации числовых значений;
- → оператор индикации символьных значений.

$x := \frac{1}{3}$ $\quad x \rightarrow \frac{1}{3}$

$x = 3.3333333333 \times 10^{-1}$

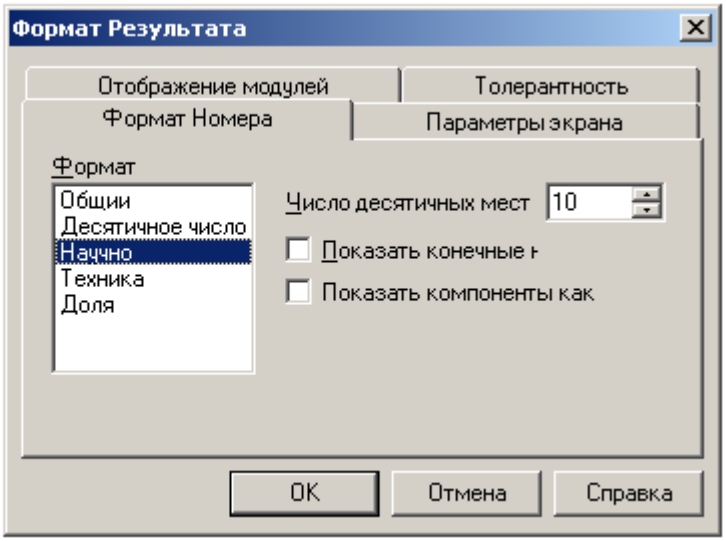


Рис. 7 – Диалоговое окно задания формата вывода чисел

Оператор индикации символьных значений → применяется для вывода результатов символьных преобразований, значений объектов, в составе которых имеются компоненты с неопределенными числовыми значениями. Такими объектами являются, например, функции с формальными параметрами, формульные выражения при выполнении над ними операций *символьных преобразований* (*Рис. 7*).

2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

2.1. Применение пакета MathCAD

Задача решения нелинейных (трансцендентных) уравнений состоит в поиске всех значений переменных, удовлетворяющих данному уравнению.

В пакете *MathCAD* существует встроенная функция *root*(*f*(*x*),*x*), выполняющая такие действия автоматически. Нужно только *явно* задать функцию *f*(*x*) и начальное значение x_0, от которого начинается *итерационное* численное уточнение корня.

В примере (*Листинг 2*) приведены примеры уточнения корня трансцендентной функции $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$, для различных начальных условий.

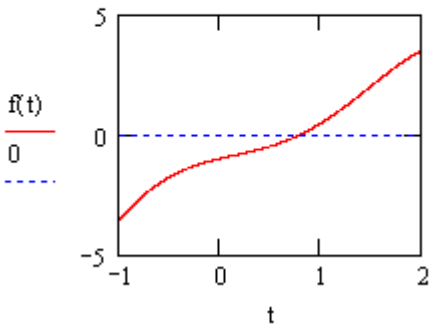
Листинг 2. Поиск корней функции. Точность численного метода

$f(x) := x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$

$z := 0.7951$	$root(f(z),z) = 0.79519783$	$z := 0.7951$	$root(f(z),z) = 0.79519788$
$z := 0.1$	$root(f(z),z) = 0.7951641$	$z := 0.1$	$root(f(z),z) = 0.79519783$
$z := 0.9$	$root(f(z),z) = 0.79563728$	$z := 0.9$	$root(f(z),z) = 0.79519788$

$TOL := 10^{-6}$

$f(x) := x^2 \cdot \sin(x) - e^{-x}$



$x := 0.79519, 0.795191 .. 0.79520$

x =	f(x) =
0.79519	$-1.59881906 \cdot 10^{-5}$
0.795191	$-1.39584445 \cdot 10^{-5}$
0.795192	$-1.19286956 \cdot 10^{-5}$
0.795193	$-9.89894404 \cdot 10^{-6}$
0.795194	$-7.86918969 \cdot 10^{-6}$
0.795195	$-5.83943259 \cdot 10^{-6}$
0.795196	$-3.80967274 \cdot 10^{-6}$
0.795197	$-1.77991013 \cdot 10^{-6}$
0.795198	$2.49855222 \cdot 10^{-7}$
0.795199	$2.27962333 \cdot 10^{-6}$

Можно видеть, что значения отличаются друг от друга, начиная с четвертого знака после запятой. Это связано с тем, что точность расчетов по умолчанию имеет значение $TOL = 10^{-3}$.

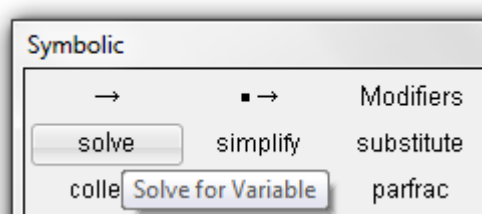
Численные расчеты всегда выполняются с определенной точностью. Эта точность задается константой *TOL*.

Меняя принудительно значение *TOL*, как в примере (*Листинг 2*), можно управлять точностью вычислений.

Для нахождения корней уравнения так же может использоваться оператор *solve* из библиотеки символьных вычислений *symbolic*.

Листинг 3. Аналитический способ поиска корней функции

$$\frac{\sin(x + 3x^2)}{x^2 + 4} \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Пара операторов *Given-Find* и *Given-Minerr* позволяет находить корни уравнения *аналитически* (см. *Листинг 4*). Здесь точность вычисления корня не зависит от *TOL*, а ограничивается точностью округления вещественных чисел.

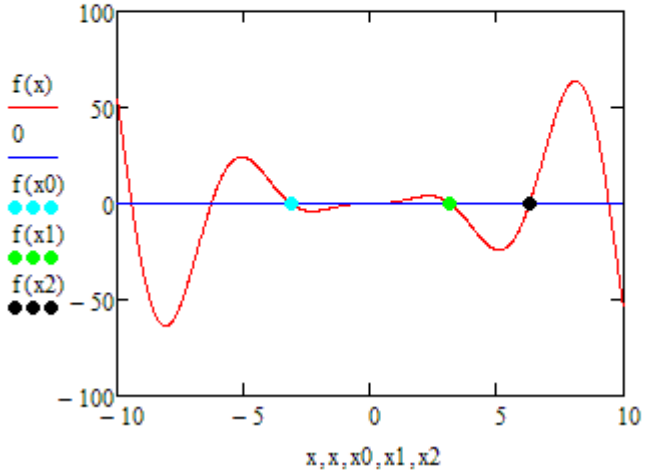
Листинг 4. Поиск решения уравнений при помощи Given-Find и Given-Minerr

$f(x) := x^2 \cdot \sin(x)$

t0 := −3 Given f(t0) = 0 x0 := Find(t0) x0 = −3.1415926536

t1 := 3 Given f(t1) = 0 x1 := MinErr(t1) x1 = 3.1415926536

t2 := 6 Given f(t2) = 0 x2 := Minerr(t2) x2 = 6.2831853072



Для автоматизированного поиска экстремумов функции используются операторы *Given-Minimize* и *Given-Maximize* (*Листинг 5*). Для выполнения поиска экстремумов необходимо задать *начальное приближение x*, так как максимумов и минимумов у функции может быть несколько, и поиск производится в окрестности начального приближения.

Листинг 5. Поиск экстремумов функции. Начальные условия.

$f(x) := x^2 \cdot \sin(x)$

выделение корня

z := 4 root(f(z), z) = 3.14164498

z := 2 root(f(z), z) = 0.07888999

уточнение корня

z := 3.14 Given f(z) = 0 x1 := Find(z) = (3.14159265)

z := 2 Given f(z) = 0 x0 := Find(z) = (0)

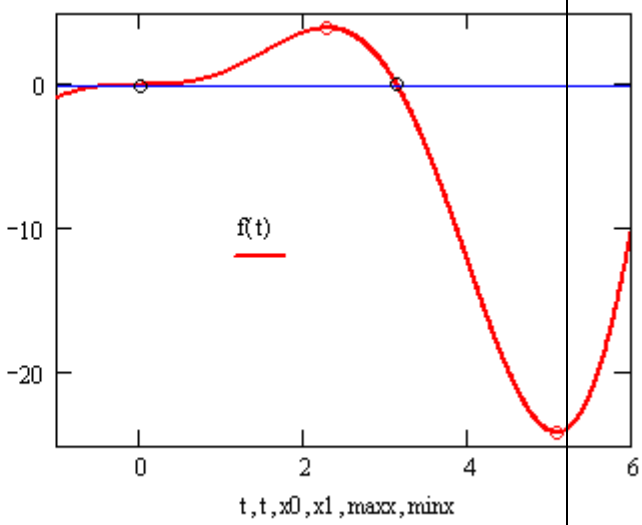
поиск экстремумов

x := 2 Given 1 < x < 6 maxx := Maximize(f, x)

x := 2.3 Given 1 < x < 6 minx := Minimize(f, x)

maxx = 2.28892973 f(maxx) = 3.94530163

minx = 5.08698509 f(minx) = −24.08296022



Кроме того, диапазон поиска экстремума можно ограничить при помощи неравенства-ограничения, накладываемого на начальное приближение *x*. Список неравенств-ограничений (в предыдущем примере он такой: $1 < x < 6$) располагается после оператора *Given*, но перед *Minimize* или *Maximize*.

2.2. Вывод графиков в MathCAD

Вывод графической информации производится в графических регионах с использованием *шаблонов*, создаваемых инструментами панели *«Графики»*. На рисунке показан начальный вид шаблона в прямоугольной (декартовой) системе координат

(значок или комбинация клавиш *Shift+2*). Здесь изображена прямоугольная область «экрана», на которой будет строиться график, а также имеются поля ввода выражения для переменной, значения которой отображаются по вертикальной оси (*Поле Y – ордината*) и переменной, отображаемой по горизонтальной оси (*Поле X – абсцисса*).

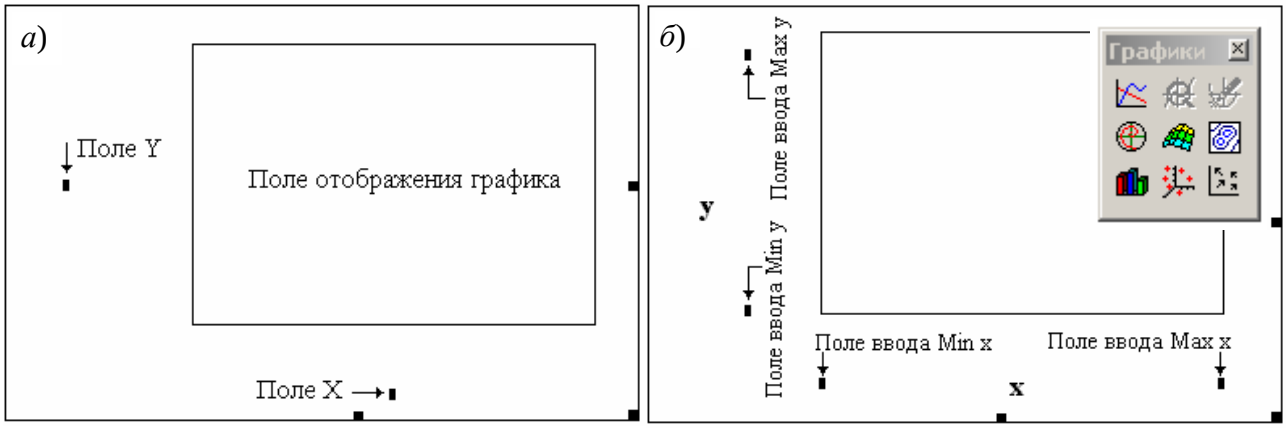


Рис. 8 – Шаблон вывода графика

После занесения выражений отображаемых переменных на шаблоне появляются поля ввода *границ диапазонов* этих переменных (*Min X*, *Max X*, *Min Y*, *Max Y*), в пределах которых происходит построение графика (*Рис. 8, б*). Если выражение для $y(x)$ определено к моменту заполнения шаблона, то график выдается сразу после его занесения в *Поле Y*, при этом границы изменения x устанавливаются по умолчанию, а границы изменения y определяются автоматически.

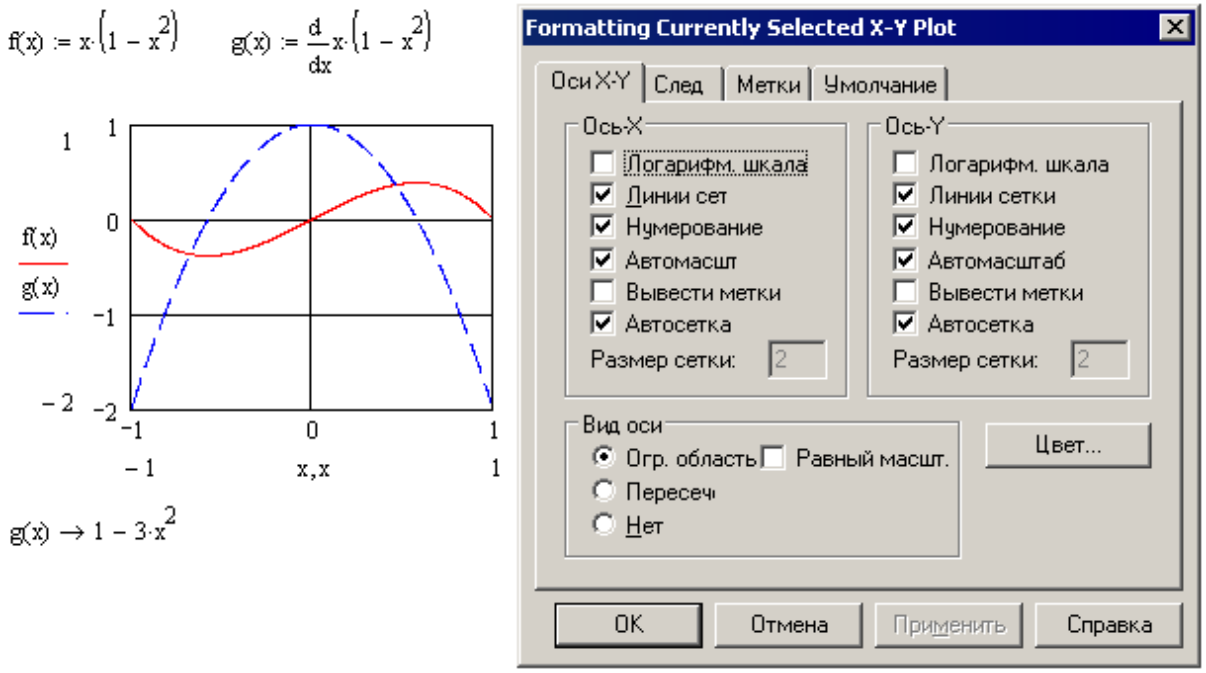


Рис. 9 – Вывод нескольких графиков в одних осях. Панель настройки графика

В *MathCAD* при построении графиков непрерывных зависимостей $y(x)$ производится автоматический выбор шага независимой переменной x. Если требуется, выбора шага построения графика можно *задать принудительно*. Для этого надо перед графическим регионом ранжировать массив x переменных с требуемым шагом изменения, например, x:= 0, 0.1 .. 1. В этом случае при построении графика значения $y(x)$ будут вычисляться только в точках x_1=0; x_2=0.1; x_3=0.2 и т.д. до x_{11}=1. Массивы значений (x_i ,$y(x_i)$) будут образовывать узловые точки графика, по умолчанию узловые точки графика будут соединены отрезками прямой.

Графические регионы позволяют строить в одних осях несколько графиков одновременно. Для этого необходимо в *Поле Y* поместить *список выводимых переменных, разделенных запятыми*. Запятая при этом не отображается, а каждое имя вводимой переменной помещается на новую строку. На рисунке (*Рис. 9, а*) приведен пример графика, отображающего две различные зависимости (от одной переменной *x*).

Абсциссы графиков так же могут быть представлены разнотипными переменными – как дискретными, так и непрерывными, они так же должны перечисляться через запятую.

График в *MathCAD* допускает гибкую настройку. Двойной клик в поле шаблона вызывает на экран диалоговое окно настройки с четырьмя вкладками (Рис. 9, б). Назначение большинства элементов управления, размещенных на вкладках окна, понятно из соответствующих подписей.

На вкладке *X-Y Axes* устанавливаются параметры осей графика и размерной сетки в его поле. Вкладка *Traces* позволяет настроить параметры линий, отображающих графики. Здесь можно выбрать тип графика (*Type*), цвет отображения графика (*Color*), вид линии (*Line*), вид символа, помечающего положение узловых точек (*Symbol*).

2.3. Алгоритмические возможности MathCAD

Система *MathCAD* обладает широкими возможностями для написания сложных алгоритмических конструкций. Алгоритмические команды (*операторы*) вызываются из окна *Programming* (*Программирование*) как на

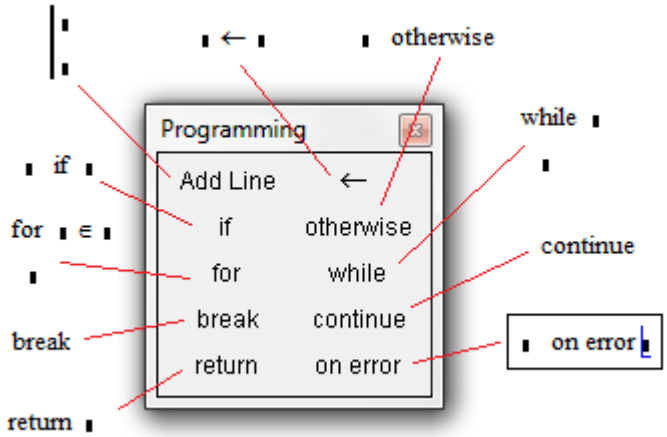


Рис. 10 – Окно вызова алгоритмических команд (операторов)

Операторный блок Add Line. Вертикальная линия (оператор *Add Line*) объединяет отдельные операторы в *операторный блок* с одним входом и одним выходом, который выполняется как единый оператор. Увеличить количество операторов внутри *операторного блока* можно многократным нажатием на кнопку «*Add Line*». Внутри операторного блока операторы выполняются последовательно сверху вниз.

Оператор локального присваивания. Кнопка «←» – это оператор присвоения значения локальной переменной. Область видимости такой переменной ограничена операторным блоком, задаваемым при помощи *Add Line*. Локальность переменной подразумевает ее невидимость вне операторного блока (программы), что не допускает путаницы переменных из разных программ.

Оператор выбора. Шаблон *if* (*если*) позволяет вводить в программу альтернативу с одной ветвью, иначе говоря, *оператор условного перехода*.

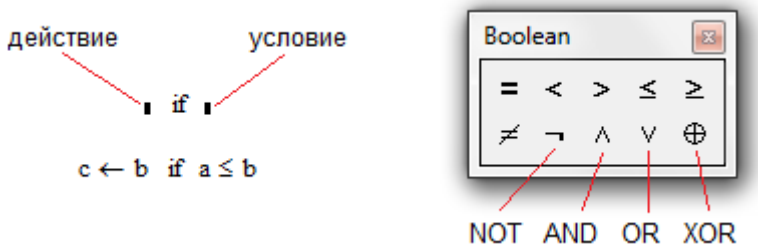


Рис. 11 – Структура оператора if. Блок ввода логических команд

Суть условного перехода в проверке *условия*, которое записывается в позиции справа от оператора *if*. Если *условие истинно*, то однократно выполняется *действие*, записанное в позиции слева от оператора *if*, после чего выполнение оператора заканчивается. Если *условие ложно*, то выполнение оператора *if* заканчивается немедленно, без выполнения *действия*.

Условие может состоять из довольно сложной ***логической конструкции***, построенной при помощи команд сравнения (=, ≠, <, ≤, >, ≥) и логических команд (NOT, OR, AND, XOR) – как на *Рис. 11*.

Возможности оператора *if* можно существенно расширить при помощи оператора ***otherwise*** (*иначе, в противном случае*). Он позволяет реализовать конструкции с двумя исходами (см. *Листинг 6, а*): в случае *истинности условия* выполняется одно *действие*, а в случае его *ложности* – другое (расположенное перед оператором *otherwise*).

Листинг 6. Оператор if-otherwise и функция if( )

а) $\text{maximum}(a,b) := \begin{cases} a & \text{if } a \ge b \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$

$\text{maximum}(3,2) = 3 \qquad \text{maximum}(3,4) = 4$

б) $\max \leftarrow \text{if}(A \ge B, A, B)$

$\text{if}(A \ge B, \max \leftarrow A, \max \leftarrow B)$

Можно также воспользоваться вместо оператора *if* функцией *if( )* – как на *Листинг 6, б*. У встроенной функции *if( )* первый аргумент – *условие*, второй – *действие* при истинном условии, а третий аргумент – *действие* при невыполнении условия (*otherwise*).

Операторы цикла. В *MathCAD* имеется два оператора циклического повторения – оператор *while* и оператор *for*.

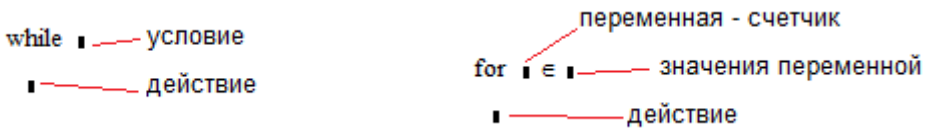


Рис. 12 – Структура операторов while и for

При выполнении оператора *while* (с предусловием) в первую очередь производится проверка *условия*, если оно *истинно*, то выполняется *действие*, после чего вновь проверяется *условие* и т.д. до тех пор, пока *условие* не станет *ложным*. Программист должен предусмотреть возможность выхода из цикла.

Оператор цикла *for* последовательно перебирает значения *переменной-счетчика* (слева от значка ∈) из *множества допустимых значений* (справа от символа ∈). Пока *переменная-счетчик* принадлежит *множеству допустимых значений*, *действие* повторяется, как только значение *переменной* выходит за границы *множества*, действие цикла заканчивается.

Программные блоки, описанные ниже (*Листинг 7*), вычисляют сумму *N* первых натуральных чисел. На примерах видно, что в операторе *for* изменение переменной-счетчика *i* происходит автоматически (неявно) в диапазоне 1..*N*, в то время как для оператора *while* изменение переменной *i* приходится явно прописывать.

Листинг 7. Операторы цикла while и for

```
SumA(N) := | S ← 0
           | i ← 1
           | while i ≤ N
           |   | S ← S + i
           |   | i ← i + 1
           | S

SumB(N) := | S ← 0
           | for i ∈ 1..N
           |   S ← S + i
           | S

SumA(3) = 6    SumA(4) = 10    SumA(5) = 15    SumB(3) = 6    SumB(4) = 10    SumB(5) = 15
```

На примерах ниже (*Листинг 8*) иллюстрируются некоторые свойства оператора *for*. Оператор *for* автоматически определяет, в какую сторону необходимо изменять (уменьшать или увеличивать) *переменную-счетчик.*

Оператор *for* может перебирать значения *переменной-счетчика* из *множества допустимых значений* довольно разнородной структуры – числовой, символьной, матричной.

Листинг 8. Некоторые свойства оператора for

```
SumB(N) := | S ← 0
           | for i ∈ 1..N
           |   S ← S + i
           | S

SumC(N) := | S ← 0
           | for i ∈ N..1
           |   S ← S + i
           | S

SumB(4) = 10        SumC(4) = 10

SumX := | S ← 0
        | for i ∈ 1,3,4,7,21,13,101
        |   S ← S + i
        | S

SumX = 150

V := | i ← 0
     | for VX ∈ ( 12.3   "abcd" )
     |           ( 2 + 3·i   1 )
     |   | V_i ← VX
     |   | i ← i + 1
     | V

V = ( 12.3 )
    ( 2 + 3i )
    ( "abcd" )
    ( 1 )
```

Операторы прерывания. В системе *MathCAD* операторы прерывания представлены тремя командами: *break, continue* и *return*.

Операторы *break* и *continue* используются для прерывания работы циклов for и while, а оператор return – для прерывания всего блока операторов.

Если при выполнении цикла встречается оператор *continue* (*перезапуск цикла*), то вычисления в теле цикла останавливаются и цикл *запускается снова*. Если в цикле встречается оператор *break* (*прерывание цикла*), то выполнение тела цикла прекращается и происходит *выход из цикла*.

В примере, приведенном ниже (*Листинг 9*), создается функция *PositivSubvector*, выбирающая положительные координаты вектора *x*. Оператор *continue* перезапускает цикл каждый раз, когда встречается отрицательный компонент вектора *x*. В этом же примере строится функция *FirstPositiv*, выбирающая первую положительную координату вектора *x*. Важно, что если такая координата найдена, то оператор *return* останавливает выполнение функции (дальнейший перебор элементов вектора *x* не производится).

Листинг 9. Операторы continue и return

```
x := (2, −1, 12, −8, 7, −0.8)ᵀ

PositivSubvector(v) := | j ← −1
                       | for i ∈ 0..last(v)
                       |   | continue  if v_i ≤ 0
                       |   | j ← j + 1
                       |   | w_j ← v_i
                       | w

PositivSubvector(x) = (2, 12, 7)ᵀ

FirstPositiv(v) := for i ∈ 0..last(v)
                     return v_i  if v_i > 0

FirstPositiv(x) = 2
```

Оператор on error. Этот оператор является обработчиком тех или иных ошибок, возникающих при вычислении. Он записывается так:

операция в случае ошибки основная операция

■ on error ■

Рис. 13 – Структура оператора on error

Оператор *on error* выполняется следующим образом. Если при выполнении *основной операции* (расположенной справа от оператора *on error*) происходит *ошибка*, то вычисление этой операции прекращается и выполняется «*операция в случае ошибки*» (расположенная слева от *on error*), см. *Листинг 10*.

Листинг 10. Обработчик ошибок on error

```
angl1(x,y) := x/y        angl1(2,0) = ■
                         Divide by zero.
angl2(x,y) := 10^10 on error x/y        angl2(2,0) = 1 × 10^10        angl2(4,2) = 2
```

2.4. Аналоговая модуляция

Аналоговая модуляция является таким способом преобразования цифрового сигнала в аналоговый, при котором двоичная информация кодируется изменением амплитуды (U), частоты (ω) или фазы (φ) гармонического сигнала $F(t) = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

"0" → +5 В

"1" → 0 В

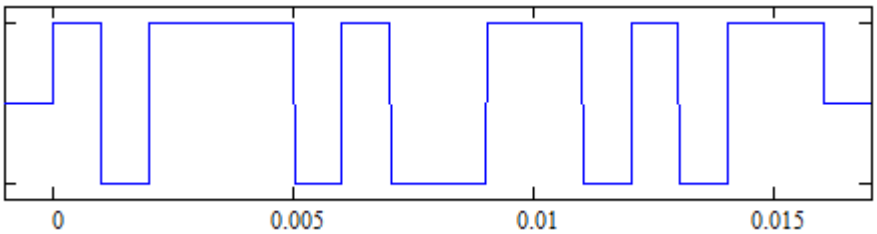


Рис. 14 – Цифровой сигнал. Потенциальный код

Основные способы аналоговой модуляции – *амплитудная* (*а*), *частотная* (*б*) и *фазовая* (*в*) показаны на *Рис. 15*. На графике (*Рис. 14*) приведена последовательность битов исходного сигнала $S(t)$, представленная *потенциальным кодом* – логическому нулю соответствует +5 В, логической единице – 0 В.

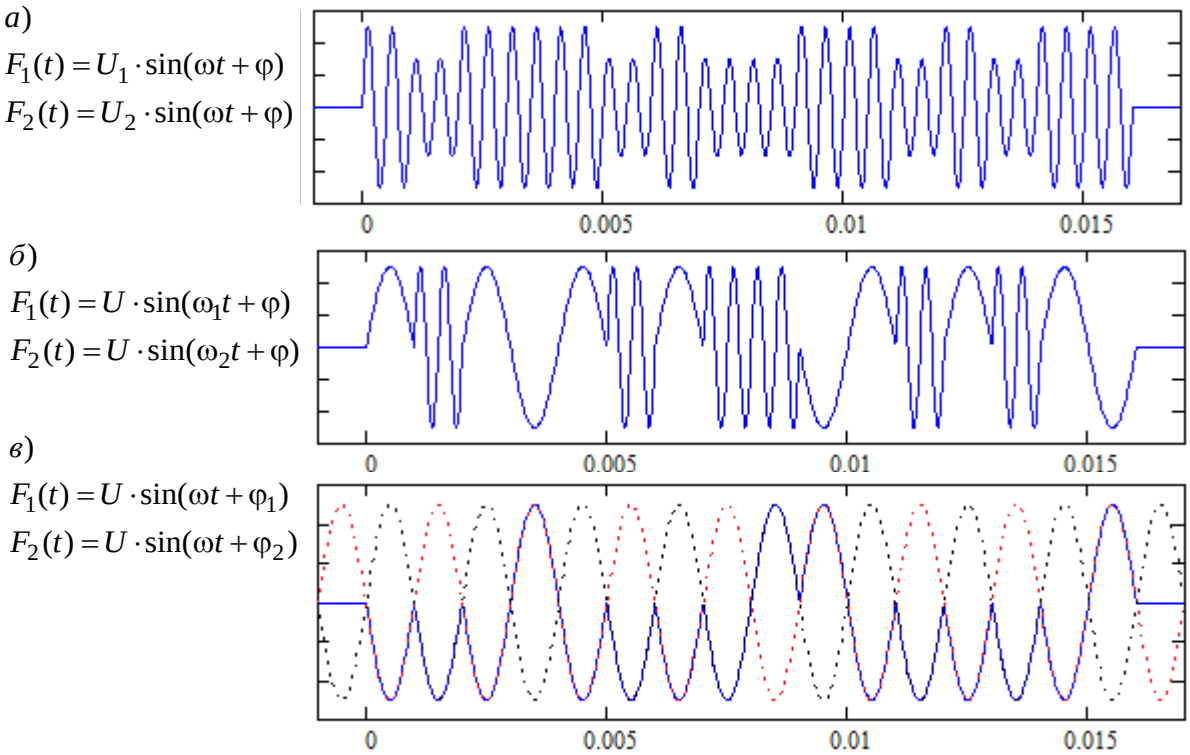
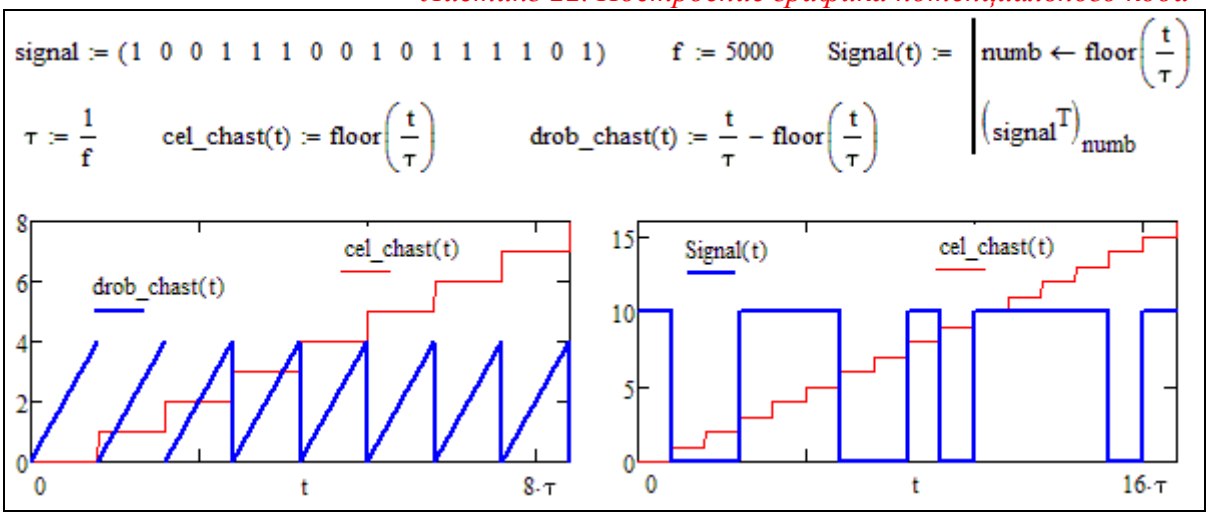


Рис. 15 – Виды аналоговой модуляции

Для построения на графике функции потенциального кода – последовательности битов исходного сигнала *S*(*t*), формируемого с тактовой частотой (частотой квантования) f_d, необходимо определять номер тактового интервала (*Листинг 11*).

Воспользуемся встроенной функцией *floor( )*, вычисляющей целую часть числа. Рассмотрите, как построены функции целой части *cel_chast(t/τ)* и дробной части *drob_chast(t/τ)* числа *t*/τ. При формировании функции *Signal(t)* в локальную переменную *numb* заносится номер тактового периода, строящийся аналогично функции *cel_chast(t/τ)*.

Листинг 11. Построение графика потенциального кода



2.5. Лабораторная работа №1. Программирование в MathCAD

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Изучить операторы *MathCAD*, научиться применять их при написании программ. Научиться отслеживать значения числовых и логических переменных и выражений в процессе отладки программы. Освоить умение переводить мнемонические выражения в последовательность операторов. Восстановить знания из школьного курса физики о гармонической зависимости, закрепить понятия амплитуда, фаза и частота. Визуализировать отличия и сходства между цифровым и аналоговым сигналом.

Задание на лабораторную работу

1. В индивидуальном задании (*Таблица 3*, *Приложение 1*) в шестнадцатеричном формате задан код S_{hex}, который необходимо представить в виде двоичной последовательности *signal*.

2. Построить функцию *Signal(t)*, отображающую на графике сигнал *signal* в виде потенциального кода с заданной частотой квантования f_d.

3. Построить алгоритм кодирования данного сигнала заданным видом аналоговой модуляции $F(t) = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ с заданными несущей частотой, амплитудой и фазой.

4. Построить цифровой сигнал *Signal*(*t*) и аналоговый сигнал $F(t)$ на графике.

5. Использовать оператор *on error* для корректной обработки ошибок при вычислении.

6. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями.

Контрольные вопросы

1. Какие виды аналоговой модуляции вы знаете?
2. Записать формулу гармонической функции, перечислить ее параметры.
3. Существуют ли в природе чисто цифровые сигналы?
4. Как установить при выводе на экран количество знаков после запятой?
5. Опишите способ вычисления нулей функции при помощи стандартной процедуры solve. Как можно задать точность вычислений? Как установить количество десятичных знаков, отображаемых на экране?
6. Как задается точность численных расчетов в MathCAD?
7. Что такое участок возрастания и убывания функции? Как эти участки связаны с поведением производной?
8. Как задается диапазон и шаг изменения переменной в MathCAD?
9. Что такое непрерывная функция? Дайте строгое определение через пределы.
10. Как найти горизонтальные и наклонные асимптоты функции?
11. Опишите способ вычисления максимумов (минимумов) функции при помощи стандартной процедуры Given-Maximize и Given-Minimize.
12. Как определить экстремумы функции по поведению производных?
13. Как построить цифровой сигнал на графике?
14. Как может вести себя функция на бесконечности? Перечислить все случаи.
15. Как найти вертикальные асимптоты?
16. Опишите понятие предела функции в точке? На бесконечности?
17. Опишите способ вычисления корней при помощи стандартной процедуры root(f(x), x), как можно задать точность вычислений?
18. Опишите способ вычисления нулей функции при помощи стандартной процедуры Given-Find как можно задать точность вычислений?

3. ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

В курсе линейной алгебры студенты знакомятся с такими понятиями как *матрица* и *вектор*, рассмотрим, какие инструменты для работы с матричными объектами предоставляет *MathCAD*. Под матрицей понимается прямоугольная таблица чисел размерности $n \times m$.

Вектор – это такая матрица у которой n=1 или m=1. В средней школе давалось определение вектора как направленного отрезка прямой, важно понимать, что эти определения эквивалентны.

Над векторами и матрицами определены операции *сложения и умножения на число* – эти операции выполняются *поэлементно* и обладают свойствами *линейности*. Дополнительно определены операции произведения матриц и умножения матрицы на вектор. Свойства этих операций рассмотрены ниже.

Кроме того, для матриц введено понятие *определителя* – числа, некоторым образом характеризующего матрицу и понятие *ранга* – размерности линейно-независимой системы векторов, составляющих матрицу. Строгое определение этих понятий дается в курсе высшей математики, здесь мы рассмотрим, как вычислять эти показатели и как ими пользоваться.

3.1. Матричные операции MathCAD

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики. Комплекс *MathCAD* содержит достаточно представительную библиотеку встроенных функций, в том числе и функций, работающих с матрицами. Ниже рассмотрены некоторые функции, осуществляющие матричные операции, используемые при выполнении лабораторных и практических работ.

Ввод и редактирование формата матриц с помощью шаблона

Интерфейс процессора *MathCAD* позволяет вводить матрицы с помощью шаблона, задаваемого в диалоговом окне (*Рис. 16,б*). Диалоговое окно вызывается командой главного меню *Insert\Matrix*, либо комбинацией клавиш-акселераторов *Ctrl+M*, либо нажатием на пиктограмму палитры матричных операций (*Рис. 16,а*).

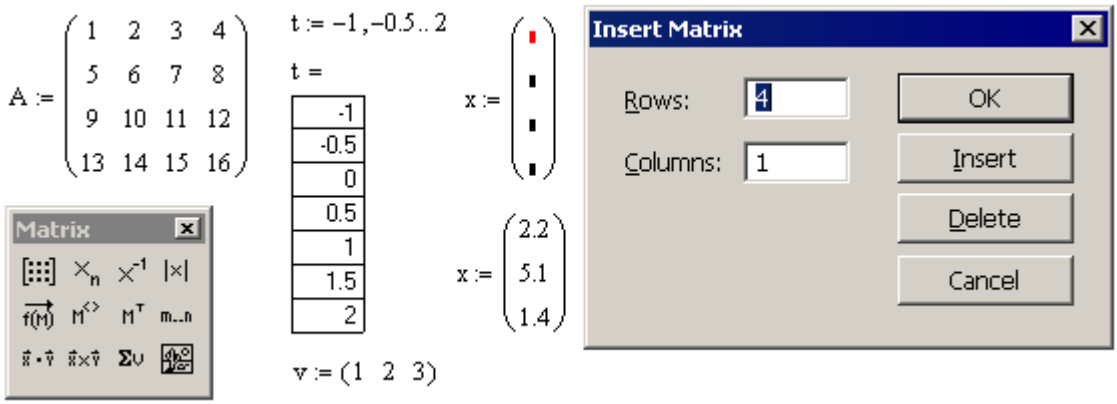


Рис. 16 – Матрицы и вектора в MathCAD. Диалоговое окно ввода матрицы

С помощью этого же диалога можно редактировать формат уже созданных матриц, добавляя/удаляя строки и столбцы. Эти действия вызываются кнопками *Insert* и *Delete*.

Нумерация строк и столбцов в *MathCAD* по умолчанию начинается ***с нуля*** (*Рис. 17*). Принцип нумерации элементов матриц можно переопределить с помощью команды **ORIGIN:=1** (после этого матрицы и вектора нумеруются не с 0, а с 1).

Интерпретирующая система блокирует некорректную матричную операцию. При этом некорректный, нереализуемый оператор выделяется измененным цветом шрифта и комментарием в виде всплывающей подсказки. Таким образом, программист может контролировать принципиальную осуществимость матричных операций, связанную, в частности, и с размерностью операндов.

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix} \qquad A_{0,0} = 11 \qquad A_{4,3} = 54 \qquad \boxed{A_{3,4} = \blacksquare\blacksquare}$$

This array index is invalid for this array.

Рис. 17 – Некорректное обращение к элементу матрицы блокируется

Функции компоновки и декомпозиции матриц и векторов

В составе библиотеки встроенных функций *MathCAD* имеются функции, позволяющие производить, формировать матрицу из блоков-подматриц и выделять из заданной матрицы подматрицы нужного размера. Компоновку матрицы из блоков осуществляют функции ***augment, stack***:

Листинг 12. Функции объединения матриц по строкам и столбцам

$$\text{augment}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{stack}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}$$

Выделение подматрицы выполняется функцией *submatrix* и оператором выделения столбца матрицы $\mathbf{M}^{<>}$. Функция выделения подматрицы *submatrix* имеет следующий синтаксис вызова:

$$\text{submatrix}(\mathbf{A}, row_1, row_2, col_1, col_2),$$

где **A** – исходная матрица, из которой извлекается фрагмент; row_1 и row_2– номера начальной и конечной выбираемых строк в матрице; col_1 и col_2– номера начального и конечного столбца в матрице A, включаемого в выделяемую подматрицу.

Листинг 13. Функции извлечения подматрицы

$$\text{submatrix}\left[\begin{pmatrix} a00 & a01 & a02 & a03 \\ a10 & a11 & a12 & a13 \\ a20 & a21 & a22 & a23 \\ a30 & a31 & a32 & a33 \\ a40 & a41 & a42 & a43 \end{pmatrix}, 1, 3, 1, 2\right] \rightarrow \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a00 & a01 & a02 & a03 \\ a10 & a11 & a12 & a13 \\ a20 & a21 & a22 & a23 \\ a30 & a31 & a32 & a33 \\ a40 & a41 & a42 & a43 \end{pmatrix}^{\langle 0 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} a00 \\ a10 \\ a20 \\ a30 \\ a40 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a00 & a01 & a02 & a03 \\ a10 & a11 & a12 & a13 \\ a20 & a21 & a22 & a23 \\ a30 & a31 & a32 & a33 \\ a40 & a41 & a42 & a43 \end{pmatrix}^{\langle 2 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} a02 \\ a12 \\ a22 \\ a32 \\ a42 \end{pmatrix}$$

Для частного случая выделения подматрицы – выделения столбца с заданным номером – в *MathCAD* имеется специальный оператор $\mathbf{M}^{<>}$. Строку матрицы **A** можно выделить как при помощи функции submatrix, так и при помощи оператора $\mathbf{M}^{<>}$ (*Листинг 14*).

Приведенный ниже пример (*Листинг 14*) иллюстрирует применение оператора $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ – транспонирования матрицы или вектора. *Оператор транспонирования* делает строки матрицы столбцами, а столбцы – строками, визуально эта операция соответствует зеркальному отражению относительно диагонали.

Листинг 14. Выделение столбца и строки матрицы

$$v1 := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{\langle 1 \rangle} \qquad v1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \\ 42 \\ 52 \end{pmatrix} \qquad v2 := \left(\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right)^{\langle 2 \rangle} \qquad v2 = \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 33 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$v2 := v2^{\mathrm{T}} \qquad v2 = (31 \quad 32 \quad 33 \quad 34)$$

Матричные и векторные арифметические операции

В среде *MathCAD* операции над матрицами производятся в соответствии с правилами математики.

При умножении матрицы (или вектора) на константу *K*, все элементы матрицы (вектора) умножаются на *K*.

При сложении (вычитании) матриц (или векторов) суммирование производится покоординатно. Складывать и вычитать можно только матрицы (вектора) совпадающей размерности.

Произведение матриц производится по правилу «*строка на столбец*» – каждый элемент матрицы-произведения есть скалярное произведение вектора-строки первой матрицы на вектор-столбец второй:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}: \quad \mathbf{c}_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_{i,k} \cdot \mathbf{b}_{k,j}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}[m \times n]$, $\mathbf{B}[n \times p]$, $\mathbf{C}[m \times p]$. Напомним, что элементы матриц в *MathCAD* нумеруются с нуля, поэтому индексы изменяются так: $i = 0...m-1$, $j = 0...p-1$.

Естественно в формуле (1) требовать, чтобы количество столбцов матрицы **A** совпадало с количеством строк матрицы **B** – такие матрицы называются *согласованными* или *сцепленными*.

Листинг 15. Арифметические операции с матрицами

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 53 & 56 & 59 \\ 117 & 124 & 131 \\ 181 & 192 & 203 \end{pmatrix} \qquad |A \cdot B| = 0 \qquad \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 31 & 41 \\ 51 & 61 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 25 & 33 \\ 41 & 49 \end{pmatrix} \qquad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Нельзя забывать, что в отличие от произведения чисел, матричное произведение некоммутативно, т.е., в общем случае $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, подтверждение этому легко построить (см., например *Листинг 16*).

Листинг 16. Матричное произведение некоммутативно

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8\\11&9\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\11&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&10\\15&10\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\18&16\end{pmatrix}$$

Для создания единичной и диагональной матриц заданного размера $n\times n$ в *MathCAD* можно использовать функции ***identity***(*n*). и ***diag***(***x***) соответственно (*Листинг 17*), здесь вектор ***x*** – вектор диагональных элементов создаваемой матрицы.

Единичная матрица **E** выполняет роль единицы при матричном умножении, а нулевая матрица **0** – роль нуля. Обучаемому предлагается проверить свойства этих матриц: $\mathbf{A}\times\mathbf{E}=\mathbf{A}$, $\mathbf{E}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\mathbf{0}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

Листинг 17. Создание единичной и диагональной матриц

$$\text{identity}(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{identity}(2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad D:=\text{diag}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad |D|=6$$

Функции определения размеров матриц

Возможны ситуации, когда для вычислительного процесса необходимы сведения о размерах матриц, которые становятся известны только после их формирования в ходе вычислений. Для получения такой информации используются функции определения количества строк и столбцов в матрицах ***rows*** и ***cols.***

Листинг 18. Использование функций rows и cols

$$A:=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\qquad C:=\text{augment}(A\cdot B,\text{identity}(\text{rows}(A\cdot B)))\qquad \text{rows}(C)=3\quad\text{cols}(C)=6\qquad C=\begin{pmatrix}53&56&59&1&0&0\\117&124&131&0&1&0\\181&192&203&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B:=\begin{pmatrix}11&12&13\\21&22&23\end{pmatrix}\qquad C:=\text{stack}\left(C,\text{identity}(\text{cols}(C))^{\langle 0\rangle T}\right)\qquad \text{rows}(C)=4\quad\text{cols}(C)=6\qquad C=\begin{pmatrix}53&56&59&1&0&0\\117&124&131&0&1&0\\181&192&203&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

На *Листинг 18* выведен пример довольно сложного формирования матрицы **C** из матриц **A** и **B** с использованием функций *rows* и *cols* для определения размеров промежуточных матриц.

Применение функций *rows* и *cols* повышает универсальность выражений, использующих матричные операции, они становятся менее зависимыми от конкретных размеров исходных матриц.

При программировании нестандартных пользовательских операций с элементами матриц особенно важно знать их размерность для организации циклов.

Оператор | x |

Листинг 19. Вычисление определителя квадратной матрицы

$$D:=\text{diag}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad |D|=6\qquad\left|\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}\right|=0$$

Расчет определителя квадратной матрицы в *MathCAD* производится оператором **|A|.** Попытка применить этот оператор к неквадратной матрице с количеством столбцов более одного вызывает ошибку.

Формирование матрицы или вектора на основе заданной функции

В ряде случаев значения элемента матрицы $\mathbf{a}_{i,j}$ можно связать со значениями его индексов некоторой функцией от двух целочисленных аргументов: $\mathbf{a}_{i,j} = F(i, j)$. В этом случае матрицу произвольного размера можно сформировать при помощи встроенной функции ***matrix***(*m*, *n*, *F*), где *m* и *n* – число строк и столбцов в создаваемой матрице, *F* – имя функции.

Листинг 20. Формирование матриц функцией matrix

$F(x,y) := 2^{x+y}$

$F(3,4) = 128$

$\text{matrix}(4,5,F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \end{pmatrix}$

$A := \text{matrix}(3,3,F) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

Матрицу произвольного размера можно сформировать, задавая значение каждому элементу с помощью оператора назначения (*Листинг 21*). Перебор множества индексов может быть произведен с помощью *ранжированных переменных* (создание матрицы **A**), либо с использованием *операторов цикла в программном блоке* (создание матрицы **B**). Как видно из приведенного примера, результат одинаков.

Листинг 21. Поэлементное формирование матриц

$i := 0..2$

$j := 0..5 \quad A_{i,j} := i + j \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$B := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2 \\ \quad \text{for } j \in 0..5 \\ \quad\quad d_{i,j} \leftarrow i + j \\ d \end{array} \right. \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

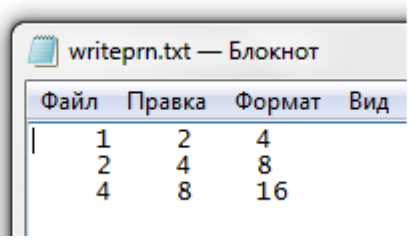
Сохранение матриц и векторов в файле

Для сохранения матриц в *текстовых файлах* и чтения их них в системе *MathCAD* имеется семейство встроенных функций:

- ***READPRN***("*путь_к_файлу*") – чтение данных в матрицу из текстового файла;
- ***WRITEPRN***("*путь_к_файлу*") – запись данных из матрицы в новый текстовый файл;
- ***APPENDPRN***("*путь_к_файлу*") – дозапись данных из матрицы в уже существующий текстовый файл.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

WRITEPRN("G:\writeprn.txt") := A



B := READPRN("G:\writeprn.txt")

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

Рис. 18 – Работа с файлами в MathCAD

Функции WRITEPRN и APPENDPRN отличаются тем, что при записи матрицы в файл первой функцией прежнее содержимое файла (если оно есть) будет стерто, а функция APPENDPRN допишет матрицу в конец адресуемого текстового файла.

Текстовая строка "*путь_к_файлу*" может содержать как полный путь к файлу, так и сокращенный – только имя файла, который должен в этом случае размещаться в рабочем каталоге.

3.2. Векторная геометрия

Математическое представление о векторе как о координатном наборе из *n* чисел, позволяет использовать его для описания физических явлений природы, обладающих *направленностью и величиной*. Таких как перемещение, скорость и ускорение, характеристики гравитационных, магнитных и электрических полей, ток и напряжение электрических схем и др.

Базис и координаты. Тройка $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ линейно независимых векторов в пространстве $\square^3$ называется *базисом*. Любой вектор $\bar{\mathbf{x}}$ может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть, представлен в виде

$$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3 . \qquad (2)$$

Числа (x_1, x_2, x_3) в разложении (2) называются *координатами вектора* $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Ортонормированный базис. Если векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты (x_1, x_2, x_3) – прямоугольными. Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

В векторной геометрии определены три вида произведений векторов – это скалярное произведение, векторное и смешанное:

Скалярное произведение – это операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и характеризующее длины векторов-сомножителей и угол между ними. Данной операции соответствует умножение длины вектора $\bar{x}$ на проекцию вектора $\bar{y}$ на вектор $\bar{x}$. Скалярное произведение может быть вычислено по следующим формулам:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos(\angle \overline{xy}) \qquad (3)$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 \qquad (4)$$

Соотнесение формул (3) и (4) позволяет легко вычислить угол $\angle \overline{xy}$ между векторами.

Через скалярное произведение определяется ***длина вектора***, под которой обычно понимается его *модуль* или *абсолютное значение*:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} . \qquad (5)$$

Векторным произведением вектора $\bar{x}$ на вектор $\bar{y}$ называется вектор $\bar{x} \times \bar{y}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

• длина вектора $|\bar{x} \times \bar{y}|$ равна произведению длин векторов $|\bar{x}|$ и $|\bar{y}|$ на синус угла между ними:

$$|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \sin(\angle \overline{xy}); \qquad (6)$$

• вектор $\bar{x} \times \bar{y}$ ортогонален каждому из векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$;

• вектор $\bar{x} \times \bar{y}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x} \times \bar{y}$; является правой (*Рис. 19*).

Векторное произведение рассчитывается так (как определитель записанной ниже матрицы, составленной из базисных ортонормированных векторов $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ и координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$):

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1). \qquad (7)$$

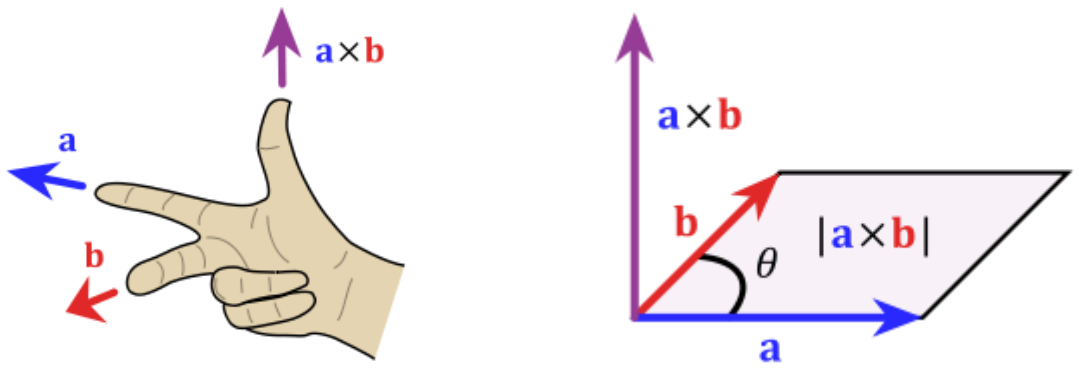


Рис. 19 – Результат векторного произведения направлен так, чтобы образовывать правую тройку векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})$.

Иначе произведение $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ может быть задано так:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Смешанное произведение помимо линейности обладает следующими свойствами:
$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})$.

Три вектора, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными* (или иначе говоря – *линейно зависимыми*) тогда и только тогда, когда $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$. Следует из (8).

Тройка векторов является правой (*Рис. 19*) тогда и только тогда, когда $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$.

Если же $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})<0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют левую тройку векторов.

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование – это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Линейная зависимость векторов

Важную роль в математике играет понятие линейной зависимости векторов. *Линейная зависимость* – это возможность выразить один вектор через другие вектора. Говорят, что вектор $\bar{\mathbf{z}}$ является линейной комбинацией других векторов, например $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$, если существуют такие числа a и b, что $\bar{\mathbf{z}}=a\cdot\bar{\mathbf{x}}+b\cdot\bar{\mathbf{y}}$. Вектор $\bar{\mathbf{z}}$ может быть выражен через $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$.

Если теперь из линейно зависимых векторов $\bar{\mathbf{z}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ составить матрицу **A**, то *определитель* этой матрицы будет равен нулю, а ее *ранг* – будет равен двум. Понятие ранга матрицы и его свойства рассматриваются в курсе математики, для нас важно понимать, что *ранг – это количество линейно независимых векторов матрицы*. Здесь можно рассматривать матрицу как набор из трех векторов-строк или трех векторов-столбцов.

Листинг 22. Определитель и ранг матрицы, состоящей из ЛЗС векторов

$$v1:=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad v2:=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\quad v3:=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\quad A:=\mathrm{augment}(v1,v2,v3)\quad A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\quad \mathrm{rref}(A)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$|A|=0\qquad \mathrm{rank}(A)=2$$

В примере (*Листинг 23*) матрица ***A*** составляется из линейно-зависимых векторов ***v1***, ***v2*** и ***v3***, что определяет величину 2 ранга матрицы. И равенство нулю ее определителя.

Функция *rref( )* в данном примере служит для приведения матрицы к треугольной форме. Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице ***rref(A)*** третья строка нулевая.

В листинге ниже доказывается, что вектор-столбец ***v3*** является линейной комбинацией векторов ***v1*** и ***v2***. Здесь подобраны коэффициенты (a= -1, b= 2) линейного разложения вектора ***v3*** через векторы ***v1*** и ***v2***.

*Листинг 23. Построение линейной комбинации векторов-столбцов матрицы **A***

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 2 \qquad \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \boxed{v3 := \frac{1}{3}\cdot v1 + \frac{4}{3}\cdot v2} \qquad v3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Поскольку система линейно-зависима, в полученной треугольной матрице ***rref(A)*** третья строка нулевая (см. *Листинг 22*). Это значит, что и среди строк ***s1***, ***s2*** и ***s3*** имеется одна – являющаяся линейной комбинацией двух других.

*Листинг 24. Построение линейной комбинации векторов-строк матрицы **A***

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 2 \qquad \mathrm{rref}\left(A^T\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s1 := (1 \;\; 2 \;\; 3) \qquad s2 := (4 \;\; -1 \;\; 0) \qquad \boxed{s3 := 3\cdot s1 - 1\cdot s2} \qquad s3 = (-1 \;\; 7 \;\; 9)$$

В этом листинге рассчитаны коэффициенты (a= 0.5 и b= 0.5) линейного разложения вектора-строки ***s2*** через векторы-строки ***s1*** и ***s3***.

Собственный вектор и собственное значение

Особое значение в алгебре имеет представление о матрице как о некотором ***линейном преобразовании*** (функции) над векторами. Действительно, умножение матрицы на вектор в результате дает некоторый новый вектор, т.е. матрица как бы преобразует вектор. На изучении свойств таких преобразований базируется вся компьютерная графика, часть теории дифференциальных уравнений и все операционное исчисление. Здесь мы лишь коснемся двух базовых понятий теории линейных пространств – *собственный вектор* и *собственное число* матрицы (линейного преобразования).

Собственный вектор $\bar{\mathbf{x}}$ – это вектор, умножение матрицы **A** на который даёт тот же самый вектор, умноженный на некоторое скалярное число λ, называемое *собственным числом* матрицы:

$$\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{x}} = \lambda\cdot\bar{\mathbf{x}}. \qquad (9)$$

Понятия собственного вектора и собственного числа являются одними из ключевых в линейной алгебре, на их основе строится множество конструкций. Множество всех собственных векторов линейного преобразования называется *собственным подпространством*, множество всех собственных значений матрицы или линейного преобразования – *спектром матрицы* или преобразования.

В *MathCAD* существуют функции *eigenvals( )* и *eigenvec( )* для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы (9), кроме того имеется функция *eigenvecs( )* для получения всех собственных векторов сразу.

В примере, приведенном ниже (*Листинг 25*) для матрица A, заданной произвольно, рассчитываются собственные числа при помощи функции *eigenvals( )*. В нашем случае – два из них комплексно-сопряженные, а одно – вещественное. Затем для них строятся собственные векторы *eigenvec( )* и *eigenvecs( )*, после чего производится проверка правильности вычисления собственных значений и векторов по формуле (9).

Листинг 25. Собственные вектора и собственные значения матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = 9 \qquad c := \mathrm{eigenvals}(A) \qquad \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 0.718 + 2.289i \\ 0.718 - 2.289i \\ 1.564 \end{pmatrix}$$

$$v0 := \mathrm{eigenvec}(A, c_0) \qquad v0 = \begin{pmatrix} -0.227 - 0.231i \\ 0.331 - 0.566i \\ -0.07 + 0.679i \end{pmatrix} \qquad v2 := \mathrm{eigenvec}(A, c_2) \qquad v2 = \begin{pmatrix} 0.421 \\ -0.308 \\ 0.853 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} -0.206 + 0.249i & -0.206 - 0.249i & 0.421 \\ -0.597 - 0.271i & -0.597 + 0.271i & -0.308 \\ 0.682 & 0.682 & 0.853 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot v1 = \begin{pmatrix} 0.366 + 0.684i \\ 1.533 - 0.351i \\ -1.603 - 0.327i \end{pmatrix} \qquad c_1 \cdot v1 = \begin{pmatrix} 0.366 + 0.684i \\ 1.533 - 0.351i \\ -1.603 - 0.327i \end{pmatrix}$$

3.3. Сила Лоренца в электромагнитном поле

Понятие вектора используется в электрофизике для работы с объектами имеющими ***направление и величину***. Рассмотрим задачи на вычисление силы Лоренца в электромагнитном поле. Сила $\bar{\boldsymbol{F}}$ [Н], действующая на частицу с электрическим зарядом $\boldsymbol{q}$ [Кл], движущуюся со скоростью $\bar{\boldsymbol{v}}$ [м/с], во внешнем электрическом $\bar{\boldsymbol{E}}$ [В/м] и магнитном $\bar{\boldsymbol{B}}$ [Тл] полях, такова:

$$\bar{\boldsymbol{F}} = q \cdot \bar{\boldsymbol{E}} + q \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{B}}. \qquad (10)$$

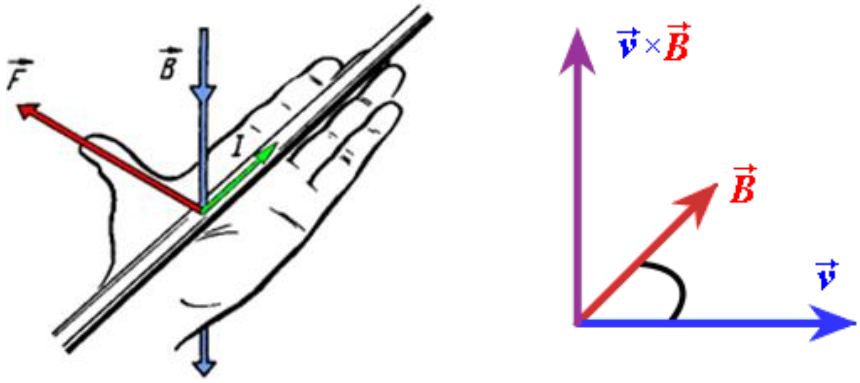


Рис. 20 – Результат векторного произведения направлен так, чтобы образовывать правую тройку векторов

При решении задач такого рода, предполагается, что направления силовых линий электрического ($\bar{\boldsymbol{E}}$) и магнитного ($\bar{\boldsymbol{B}}$) поля, а также направление движения заряда ($\bar{\boldsymbol{v}}$) описываются соответствующими векторами, имеющими три координаты в пространстве. Направление результирующей силы вычисляется в соответствии с законом (10).

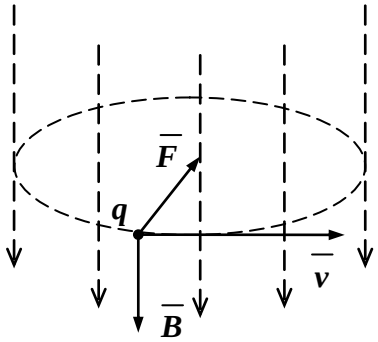
Сила Лоренца в магнитном поле (напряженность электрического поля равна 0)

Магни́тная инду́кция $\bar{B}$ [Тл] – векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля (его действия на заряженные частицы) в данной точке пространства. Иначе, $\bar{B}$ – это такой вектор, что сила Лоренца $\bar{F}$, действующая со стороны магнитного поля на заряд q, движущийся со скоростью $\bar{v}$, равна

$$\bar{F} = q \cdot \bar{v} \times \bar{B}, \qquad \text{а ее модуль } \left|\bar{F}\right| = q \cdot \left|\bar{v}\right| \cdot \left|\bar{B}\right| \cdot \sin(\alpha). \tag{11}$$

α — угол между векторами скорости и магнитной индукции (направление вектора $\bar{F}$ перпендикулярно им обоим и направлено по правилу векторного произведения, *см. Рис. 20*).

В однородном магнитном поле (*Рис. 21*) частица будет двигаться по окружности, при этом сила Лоренца будет центростремительной силой. Работа при этом не будет совершаться.



В данном случае сила Лоренца направлена к центру окружности и ускорение, ею создаваемое, направлено туда же, то есть это и есть центростремительное ускорение.

$\bar{F} = m\bar{a}$

Рис. 21 – Сила Лоренца частицы, движущаяся по окружности

Определить силу, действующую на протон, движущуюся со скоростью $\left(9.8 \cdot 10^5, 10^5, 1.2 \cdot 10^6\right)$ [м/с] в электромагнитном поле с напряженностью $\left(2 \cdot 10^{12}, 3 \cdot 10^{12}, 3.5 \cdot 10^{12}\right)$ [В/м] и магнитной индукцией $\left(2.2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^7, 5.7 \cdot 10^6\right)$ [Тл].

Листинг 26. Пример расчета силы Лоренца в электромагнитном поле

$q := 1.602176565 \cdot 10^{-19}$ [Кл] (заряд протона)

$$v := \begin{pmatrix} 9.8 \cdot 10^5 \\ 10^5 \\ 1.2 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \text{[м/с]} \qquad B := \begin{pmatrix} 2.2 \cdot 10^6 \\ 3 \cdot 10^7 \\ 5.7 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \text{[Тл]} \qquad E := \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{12} \\ 3 \cdot 10^{12} \\ 3.5 \cdot 10^{12} \end{pmatrix} \text{[В/м]}$$

$F := q \cdot E + q \cdot (v \times B)$ Сила Лоренца в электро-магнитном поле

$$F = \begin{pmatrix} -5.356 \times 10^{-6} \\ 8.652 \times 10^{-9} \\ 5.236 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \text{[Н]} \qquad |F| = 7.490154 \times 10^{-6}$$

Угол между векторами v и B

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{v \cdot B}{|v| \cdot |B|}\right) \qquad \alpha = 75.382 \cdot \text{deg}$$

Абсолютное значение силы Лоренца в магнитном поле

$$absF := |q| \cdot |v| \cdot |B| \cdot \sin(\alpha) \qquad absF = 7.36903 \times 10^{-6}$$

магнитная составляющая силы Лоренца

$FB := q \cdot (v \times B)$

$$FB = \begin{pmatrix} -5.677 \times 10^{-6} \\ -4.72 \times 10^{-7} \\ 4.675 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$|FB| = 7.36903 \times 10^{-6}$

электрическая составляющая силы Лоренца

$FE := q \cdot E$

$$FE = \begin{pmatrix} 3.204 \times 10^{-7} \\ 4.807 \times 10^{-7} \\ 5.608 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$FB + FE = \begin{pmatrix} -5.356 \times 10^{-6} \\ 8.652 \times 10^{-9} \\ 5.236 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$|FB + FE| = 7.490154 \times 10^{-6}$

3.4. Лабораторная работа №2. Расчет силы Лоренца в электромагнитном поле

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Освоить навыки решения задач, содержащих векторные величины. Решить задачу на вычисление силы Лоренца в электромагнитном поле.

Задание на лабораторную работу

1. Дано: Сила $\bar{\boldsymbol{F}}$ [Н], действует на частицу с электрическим зарядом $\boldsymbol{q}$ [Кл], движущуюся со скоростью $\bar{\boldsymbol{v}}$ [м/с], во внешнем электрическом $\bar{\boldsymbol{E}}$ [В/м] или магнитном $\bar{\boldsymbol{B}}$ [Тл] полях, найти неизвестную величину.

2. В индивидуальном задании (*Таблица 4*, *Приложение 2*) указаны известные величины, определить недостающие значения векторных функций. Изобразить их геометрически.

3. Рассчитать абсолютные значения векторных величин известными способами. Вычислить углы попарно между всеми векторными величинами.

4. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями. Изобразить взаимное расположение всех векторных величин.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «матрица», «вектор».
2. Как понятие вектор n-мерного пространства связано со школьным понятием вектора (направленного отрезка)?
3. Что такое сила Лоренца? Чему она равна?
4. Что такое вектор-строка и вектор-столбец матрицы?
5. Как вычислить силу Лоренца в магнитном поле? В электромагнитном поле?
6. Является ли матричное произведение коммутативным? А для квадратных матриц?
7. Как вычислить определитель матрицы?
8. Как задать матрицу (вектор) в MathCAD? Различаются ли эти понятия?
9. Что такое линейные операции с матрицами, векторами?
10. Какие операции над строками (столбцами) матрицы называются «эквивалентные преобразования»? Почему?
11. Как вычислить определитель матрицы разложением по строке (столбцу)?
12. Как с помощью средств MathCAD выделить нужный столбец матрицы?
13. Какие операции с матрицами можно производить?
14. Что такое обратная матрица? Когда она существует?
15. Что такое линейная комбинация векторов?
16. Как с помощью средств MathCAD выделить нужную строку матрицы?
17. Что такое обратная матрица? Как это понятие связано с обратным числом?
18. Как выделить требуемый фрагмент (подматрицу) заданной матрицы в MathCAD?
19. Как выглядит матричная единица? Матричный ноль?
20. Как изменяется определитель матрицы при эквивалентных преобразованиях строк, столбцов матрицы?
21. Как вычислить обратную матрицу через алгебраические дополнения?
22. Какие векторы называются линейно зависимыми? Дайте строгое определение.
23. Какая матрица называется диагональной? Треугольной?
24. Как величина определителя связано с числом линейно независимых строк (столбцов) квадратной матрицы?
25. Что такое ранг матрицы? Как значение ранга связано с определителем?
26. Как связано существование обратной матрицы и величина определителя?
27. Какие матрицы можно перемножать?
28. Какие векторы называются линейно независимыми? Дайте строгое определение.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и матрицы весьма тесно связаны. Матричная алгебра возникла в связи развитием методов решения линейных уравнений (алгебраических, дифференциальных) и отражает основные законы преобразования систем таких уравнений. Система линейных алгебраических уравнений в матричной форме выглядит так:

$$\begin{cases} a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + a_{1,3}\cdot x_3 = b_1; \\ a_{2,1}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + a_{2,3}\cdot x_3 = b_2; \\ a_{3,1}\cdot x_1 + a_{3,2}\cdot x_2 + a_{3,3}\cdot x_3 = b_3; \end{cases} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где **A** – матрица с *m* строками и *n* столбцами с известными элементами; **x** – вектор искомых решений размера *n*; **b** — вектор правых частей с известными элементами размера *m*.

В разделе матричной алгебры курса «*Высшая математика*» рассматривается вопрос о том, когда система вида (12) имеет решение. Здесь мы не будем разбирать его подробно, отметим лишь самое главное:

1. Система (12) имеет единственное решение, *если все строки матрицы **A** являются линейно-независимыми*, т.е. если *m=n=rank(**A**)* или иначе если $\lvert\mathbf{A}\rvert \neq 0$.	(13)
2. Система имеет бесконечное число решений, *если некоторое число строк расширенной матрицы augment(**A**,**b**)) являются линейно-независимыми*, т.е. если *n=m* и *rank(**A**)=rank(augment(**A**,**b**)), но n=m>rank(**A**).*	(14)
3. Система не имеет решений, если число линейно независимых строк матрицы ***A*** и расширенной матрицы *augment(**A**,**b**)) не совпадают*, т.е. *rank(**A**)≠rank(augment(**A**,**b**)).*	(15)

Если матрица **A** квадратная (*n=m*) и невырождена, то $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ — единственное решение (13). Можно найти его непосредственно при помощи умножения слева на обратную матрицу, а можно при помощи функции *lsolve*.

Листинг 27. СЛАУ непосредственный поиск решения. Функция lsolve

Матрица системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица правой части:

$$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя

$$|A| = 5$$

Вычисление решения системы

$$x := A^{-1}\cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение системы с помощью функции lsolve

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка правильности решения

$$A\cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1. Метод Гаусса

Системы линейных алгебраических уравнений (12) встречались обучаемому еще в курсе средней школы. Там для решения подобных систем использовался метод последовательного выражения неизвестных x_i, $i=1..n$ и подстановки полученного равенства в оставшиеся уравнения.

Этот метод в математике называется методом Гаусса, и в матричном виде сводится к эквивалентному домножению на константу и суммированию строк (но не столбцов) расширенной матрицы $\mathbf{Ab} = augment(\mathbf{A},\mathbf{b})$ с целью приведения ее к

ступенчатому виду – как матрица **Ag** на листинге (*Листинг 28*). Крайний правый столбец матрицы **Ag** – решение.

Листинг 28. Метод Гаусса. Функция rref

ORIGIN := 1

Матрица системы: Матрица правой части: Формирование расширенной матрицы системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad Ab := \mathrm{augment}(A, b) \qquad Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду
(прямой и обратный ходы метода Гаусса):

$$Ag := \mathrm{rref}(Ab) \qquad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Формирование столбца решения системы:

$$x := \mathrm{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка решения:

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Команда **ORIGIN:=1** переопределяет принцип нумерации элементов матриц – теперь они нумеруются не с 0, а с 1.

Метод Гаусса можно реализовать вручную преобразуя строки матрицы, а можно использовать встроенную функцию ***rref***, как показано на примере. Можно доказать, что полученная матрица **Ag** эквивалентна матрице **Ab** и описывает одну и ту же исходную систему линейных алгебраических уравнений.

4.2. Правило Крамера

Еще один широко известный способ построения решения системы (12) – правило Крамера (*Листинг 29*). Этот метод состоит в последовательном построении вспомогательных матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, … $\mathbf{A}_n$ путем замены i-того столбца матрицы вектором правых частей **b** и вычисления неизвестных переменных x_i, $i = 1..n$ как отношение определителей матриц $\mathbf{A}_i$ и **A**.

Листинг 29. правило Крамера

ORIGIN := 1 нумерация элементов матриц не с 0, а с 1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2 \qquad X := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B := A \cdot X \qquad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Заменить соответствующий столбец вектором B правых частей

$$A1 := \mathrm{augment}\left(B, A^{\langle 2 \rangle}, A^{\langle 3 \rangle}\right) \qquad A2 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 1 \rangle}, B, A^{\langle 3 \rangle}\right) \qquad A3 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 1 \rangle}, A^{\langle 2 \rangle}, B\right)$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A1| = 2 \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad |A2| = 8 \qquad A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad |A3| = 4$$

Вектор X - решение СЛАУ

$$X := \left(\frac{|A1|}{|A|} \quad \frac{|A2|}{|A|} \quad \frac{|A3|}{|A|} \right)^T \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Разумеется, корни системы уравнений (12) можно отыскать известными нам из предыдущих занятий операторами *Given-Find* и *Given-Minerr*.

4.3. СЛАУ вырожденный случай

Главным критерием существования решения СЛАУ является *ранг* матрицы. В примерах, рассмотренных выше *Листинг 27 - Листинг 29,* ранг основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы – самый простой тип СЛАУ, для которого *существует единственное решение* (13). Это объясняется тем, что количество линейно-независимых уравнений системы (12) равняется количеству неизвестных.

Если в СЛАУ количество уравнений больше числа неизвестных, ясно, что такая система избыточна. И может быть противоречивой, в этом случае решения у системы может и не быть. Вопрос о существовании решения в этом случае сводится к поиску непротиворечивого подмножества всех уравнений – такого, для которого ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен числу неизвестных (14).

В этом случае множество решений строится следующим образом. Поскольку количество уравнений m меньше числа неизвестных n ($n>m$), нам необходимо выбрать m ***зависимых переменных*** (обозначим их вектором $\mathbf{x_1}$) и выразить их через оставшиеся ($n–m$) переменных – ***свободные переменные*** (обозначим их вектором $\mathbf{x_2}$). Это возможно, если матрица **A** имеет m независимых строк, иными словами ни одно из уравнений не является линейной комбинацией других. Систему уравнений можно преобразовать к виду:

$$\mathbf{A}_1 \times \bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}_2 \times \bar{\mathbf{x}}_2, \qquad (16)$$

где $\mathbf{A_1}$ — квадратная матрица $m \times m$, состоящая из коэффициентов при компонентах вектора $\mathbf{x_1}$, а $\mathbf{A_2}$ — матрица, содержащая m строк и ($n–m$) столбцов, образованная коэффициентами при компонентах вектора $\mathbf{x_2}$.

Ясно, что решение такой системы будет представлять собой некоторую матричную функцию от свободных переменных $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_2)$, которую можно записать таким образом: $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \times \bar{\mathbf{x}}_2)$. Реализация таких вычислений сводится к компоновке матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ из столбцов исходной матрицы **A** и взятию обратной матрицы $\mathbf{A}_1^{-1}$, выполнение этих действий в среде *MathCAD* не составляет проблем.

Пример ниже (*Листинг 30*) иллюстрирует неоднозначность решений СЛАУ вида (16) в зависимости от того, как задана свободная переменная. Можно видеть, что разные методы решения – *lsolve, Given-Find* и *rref* выдают различные результаты. В связи с этим, к поиску решения СЛАУ нельзя подходить «бездумно», *MathCAD* –это всего лишь инструмент, он помогает в изучении математики, но не заменяет её.

Листинг 30. Бесконечное множество решений СЛАУ

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \blacksquare\blacksquare} \qquad |A| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 2$$

This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$AB := \mathrm{augment}(A, B) \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(AB) = 2$$

$$\mathrm{lsolve}(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} + \mathrm{subscript}(\mathrm{subscript}(_t, 1), 1) \\ \frac{2}{3} - 2 \cdot \mathrm{subscript}(\mathrm{subscript}(_t, 1), 1) \\ \mathrm{subscript}(\mathrm{subscript}(_t, 1), 1) \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} -0.233333 \\ 0.466666 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Given} \quad A\cdot X = B \quad X := \text{Find}(X) \qquad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(AB) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В приведенном выше примере функция *lsolve* возвращает символьные зависимости, показывающие, что решение может быть выражено через параметр t_. А функция *rref* возвращает матрицу, эквивалентную **A**, последняя строка которой состоит из нулей. Запишем, какой системе уравнений соответствует матрица *rref*(AB):

$$\begin{cases} x - z = -\dfrac{1}{3}, \\ y + 2z = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + z, \\ y = \dfrac{2}{3} - 2z. \end{cases}$$

Теперь понятно, почему переменная z называется *свободной переменной*, а x и y – *зависимыми*. Здесь переменные x и y – могут быть выражены через z, и в зависимости от неё будут принимать различные значения:

Листинг 31. Бесконечное множество решений СЛАУ

$$X(z) := \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} + z \\ \frac{2}{3} - 2z \\ z \end{pmatrix} \quad X(0.1) = \begin{pmatrix} -0.233 \\ 0.467 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad A\cdot X(0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.333 \end{pmatrix} \quad A\cdot X\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

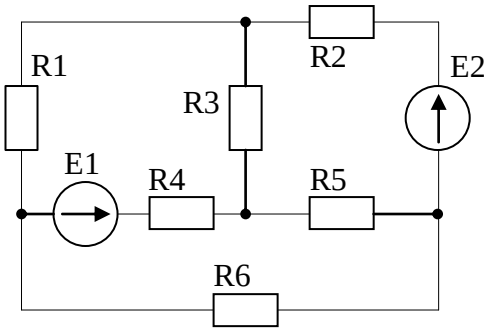
1. Как определить, разрешима ли система алгебраических уравнений?
2. Дайте определение скалярного произведения векторов. Опишите его свойства.
3. Что такое расширенная матрица СЛАУ?
4. Какие векторы называются линейно зависимыми? Дайте строгое определение.
5. Какие методы поиска решений СЛАУ вам известны?
6. Если система имеет решения, то как определить, сколько их?
7. Как решить СЛАУ, если определитель матрицы равен 0?
8. Как изменяется определитель матрицы при ее умножении на число?
9. Что такое ранг матрицы? Как его рассчитать? Как он вычисляется в MathCAD?
10. Что такое определитель матрицы?
11. Что такое ранг СЛАУ? Чем он отличается от ранга матрицы СЛАУ?
12. Что такое линейная комбинация векторов?
13. Как отделить зависимые переменные СЛАУ от свободных? Сколько их?
14. Дайте определение векторного произведения векторов. Опишите его свойства.
15. В чем смысл метода Гаусса решения СЛАУ?
16. Как определить число линейно независимых векторов в системе?
17. Как решить СЛАУ по методу Крамера? Можно ли решить вырожденную систему?
18. Что такое смешанное произведение векторов?
19. Какие векторы называются собственными векторами матрицы? Что такое собственные числа матрицы?
20. Какие векторы называются линейно независимыми? Дайте строгое определение.
21. Что такое базис? Ортонормированный базис?
22. Какая система векторов может считаться базисом?

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.

5.1. Закон Ома. Законы Кирхгофа

Умение решать системы линейных алгебраических уравнений будет востребовано в процессе поиска решения задач из теории электрических цепей, теоретических основ электротехники (ТОЭ) [30, 31], физики, теории автоматического управления (ТАУ) и методов анализа и расчета электронных схем (МАРЭС).

Рассмотрим, в качестве примера, простейшую задачу из теории цепей постоянного тока.



E1= 250 [В]
E2= 100 [В]
R1= 35 [Ом]
R2= 80 [Ом]
R3= 20 [Ом]
R4= 100 [Ом]
R5= 150 [Ом]
R6= 40 [Ом]

Рис. 22 – Задача на баланс мощностей в цепи постоянного тока

На рисунке изображена электрическая цепь, включающая *идеальные источники ЭДС* E1, E2 и *резисторы* R1-R6. В правой части рисунка приведены номиналы этих элементов. Ставится задача при помощи закона Ома и законов Кирхгофа определить токи, протекающие по всем элементам цепи и вычислить генерируемую и потребляемую схемой мощность. Вспомним эти законы:

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю, при этом втекающий в узел ток принято считать положительным, а вытекающий – отрицательным.

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \qquad (17)$$

Иными словами, сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает. Это правило следует из фундаментального закона сохранения заряда.

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжений во всех замкнутых контурах цепи, равна алгебраической сумме ЭДС этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС, то суммарное падение напряжений в контуре равно нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} U_k \qquad (18)$$

Иными словами, при полном обходе контура потенциал, изменяясь, возвращается к исходному значению. Это правило вытекает из 3-го уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля.

Частным случаем второго закона Кирхгофа для цепи, состоящей из одного контура, является закон Ома для этой цепи.

Закон Ома

Сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению *и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению данного участка цепи.*

$$I = \frac{U}{R} \qquad (19)$$

Рассмотрим применение законов (17)-(19) на примере расчета токов в цепи (*Рис. 22*).

При построении уравнений и проведении расчетов необходимо учитывать тот факт, что схема содержит *идеальные источники* напряжения E1 и E2, т.е. вводится допущение, что внутреннее сопротивление этих источников равно нулю.

Алгоритмом расчета цепи постоянного тока [30, 31]

1) Произвольно выбрать положительные направления токов и обозначить их на схеме.
2) Составить уравнения по первому закону Кирхгофа (17), причем на одно уравнение меньше числа узлов (т.к. для последнего узла уравнение будет линейно зависимым от предыдущих уравнений).
3) Выбрать независимые (главные) контуры и направление их обхода. Удобно для всех контуров выбрать одинаковое направление обхода.
4) Записать уравнения по второму закону Кирхгофа (18) для выбранных контуров.
5) Решить полученную систему уравнений – определяют искомые токи.

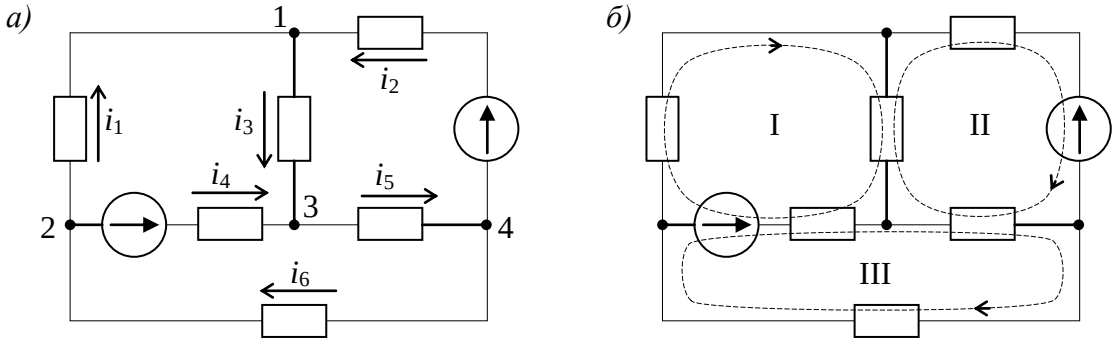


Рис. 23 – а) условные направления токов; б) направления обхода контуров

<u>Решение:</u>

1) В цепи имеется 4 узла, обозначенных на *Рис. 23, а* цифрами 1-4, значит, потребуется составить 3 уравнения по первому закону Кирхгофа. Стрелками обозначены произвольно выбранные направления протекания токов $i_1 - i_6$.

2) Составим 3 уравнения токов в узлах по первому закону Кирхгофа (17):

узел 1: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (токи i_1 и i_2 втекают в узел 1, а i_3 вытекает из узла 1);

узел 2: $-i_1 - i_4 + i_6 = 0$ (ток i_6 втекает в узел 2, а i_1 и i_4 вытекает из узла 2);

узел 3: $i_3 + i_4 - i_5 = 0$ (токи i_4 и i_3 втекают в узел 3, а i_5 вытекает из узла 3).

3) На *Рис. 23, б* предложены выбранные произвольно независимые контуры I – III и направление их обхода.

4) Для выбранных контуров запишем уравнения по второму закону Кирхгофа (18):

контур I: $u_1 + u_3 + u_4 = -E1$ (включен навстречу направлению обхода контура I);

контур II: $u_2 + u_3 + u_5 = -E2$ (включен навстречу направлению обхода контура II);

контур III: $u_4 + u_5 + u_6 = E1$ (включен по направлению обхода контура III).

5) В полученных уравнениях перейдем от напряжений к токам, пользуясь законом Ома (19) и учитывая направления токов (если ток направлен против обхода контура, он отрицательный)

контур I: $i_1 \cdot R1 + i_3 \cdot R3 - i_4 \cdot R4 = -E1$ (ток i_4 направлен против обхода контура I);

контур II: $-i_2 \cdot R2 - i_3 \cdot R3 - i_5 \cdot R5 = -E2$ (токи i_2 , i_3 и i_5 – против обхода контура II);

контур III: $i_4 \cdot R4 + i_5 \cdot R5 + i_6 \cdot R6 = E1$ (все токи по направлению обхода контура III).

6) Из первых трех и последних трех уравнений составим матрицы СЛАУ и разрешим её любым известным способом относительно токов $i_1 - i_6$.

Вектор $\boldsymbol{X} = (i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ i_6)^{\mathrm{T}}$.

В программе (*Листинг 32*) Получены следующие значения токов: $i_1 = -1.672$ А, $i_2 = 0.525$ А, $i_3 = -1.146$ А, $i_4 = 1.686$ А, $i_5 = 0.539$ А, $i_6 = 0.014$ А. Выбирая случайным образом направления протекания токов в цепях схемы, мы угадали направление токов

i_2, i_4, i_5 и i_6, а токи i_1 и i_3 имеют отрицательное значение, следовательно в реальной схеме они направлены в противоположную сторону.

Листинг 32. Решение полученной системы уравнений

$$ORIGIN := 1 \qquad R := (35\ \ 80\ \ 20\ \ 100\ \ 150\ \ 40)^T \qquad E := (250\ \ 100)^T$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 \\ -E_2 \\ E_1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4.534 \times 10^6 \qquad \mathrm{rank}(A) = 6$$

$$X := \mathrm{rref}(\mathrm{augment}(A, B))^{\langle 7 \rangle} \qquad X = \begin{pmatrix} -1.67181 \\ 0.52547 \\ -1.14634 \\ 1.6856 \\ 0.53926 \\ 0.01378 \end{pmatrix}$$

7) Проверить полученные правильность вычисления результатов можно подставив значения найденных токов в уравнения, построенные по 1 закону Кирхгофа.

8) Зная сопротивления элементов цепи [R] и токи [A], через них протекающие легко построить значения падений напряжений [B] на каждом из резисторов по закону Ома. После этого можно произвести проверку по уравнениям, построенным по 2 закону Кирхгофа.

Листинг 33. Расчет падения напряжений в цепи постоянного тока

$$k := 1..6 \qquad U_k := X_k \cdot R_k \qquad U^T = (-58.51345\ \ 42.03794\ \ -22.92678\ \ 168.55977\ \ 80.88884\ \ 0.55139)\ \ [В]$$

9) Проверить полученные результаты можно опираясь на закон сохранения энергии. То есть, вся суммарная мощность, выработана источниками ЭДС нашей схемы, должна быть потреблена нагрузкой.

Из школьного курса физики известно, что мощность источника ЭДС может быть вычислена как произведение напряжения на ток: $P_{ист} = E \cdot i$ [Вт]. Таким образом, все источники схемы вырабатывают суммарную мощность, равную

$$P_{\Sigma ист} = \sum_{k=1}^{n} E_k \cdot i_k \ \ [Вт]. \tag{20}$$

С другой стороны, мощность, потребляемая нагрузкой может быть подсчитана $P_{потр} = R \cdot i^2$ [Вт], отсюда можно вычислить суммарную мощность, рассеянную на сопротивлениях R1-R6:

$$P_{\Sigma потр} = \sum_{k=1}^{m} R_k \cdot i_k^2 \ \ [Вт]. \tag{21}$$

Пользуясь формулами (20) и (21), вычислим сгенерированную и потребленную мощность в исследуемой схеме.

Листинг 34. Баланс мощностей в цепи постоянного тока

$$Pist := E_1 \cdot X_4 + E_2 \cdot X_2 \qquad Pist = 473.94685\ \ [Вт] \qquad Ppotr := \sum_{k=1}^{6} \left[R_k \cdot (X_k)^2 \right] \qquad Ppotr = 473.94685\ \ [Вт]$$

Можем обоснованно предполагать, что токи рассчитаны верно, поскольку *баланс мощностей* в исследуемой цепи постоянного тока сошелся.

5.2. Лабораторная работа №3. Расчет цепи постоянного тока

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Закрепление умений и навыков по поиску решений СЛАУ. Актуализация математических компетенций в предметной области направления 210100.62. Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

Восстановление знаний школьного курса физики, разделы «Электричество и магнетизм», «Электростатика». Практическое осознание закона сохранения энергии. Вырабатывание стратегического, аналитического взгляда на прикладные задачи и практического подхода к теоретическим знаниям.

Задание на лабораторную работу

1. Рассчитать токи заданной в индивидуальном задании цепи.

2. Топологический вариант схемы выдается преподавателем в соответствии с индивидуальным заданием (*Таблица 6, Приложение 3*), номиналы элементов схемы – из таблицы (*Таблица 5, Приложение 3*), лишние параметры не учитывать.

3. Отразить в отчете следующую последовательность действий:

3.1. Выбрать положительные направления протекания токов, обозначить их на схеме. Пронумеровать узлы схемы и составить *n-1* уравнение по первому закону Кирхгофа.

3.2. Выбрать контуры, задать направление обхода контуров и составить уравнения по второму закону Кирхгофа. Перейти от напряжений к токам по закону Ома.

3.3. Составить систему линейных алгебраических уравнений относительно токов рассматриваемой схемы и решить ее в MathCAD.

3.4. Определить токи в цепях схемы. Рассчитать падение напряжения на каждом из резисторов.

3.5. Рассчитать баланс мощностей рассматриваемой схемы.

4. Составить отчет, в котором отразить последовательность построения СЛАУ относительно токов рассматриваемой схемы, программу с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

5. Все физические единицы в отчете обязательно(!) должны указываться с единицами измерения.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа.
2. Как определить, разрешима ли система СЛАУ, описывающая цепь постоянного тока?
3. Как связано напряжение, сопротивление и ток в резисторе?
4. Сформулируйте закон сохранения энергии в приложении к балансу мощностей.
5. Как решить СЛАУ по методу Крамера? Можно ли решить вырожденную систему?
6. Мощность. По каким двум формулам можно вычислить мощность?
7. Сформулируйте закон Ома.
8. Могут ли токи иметь отрицательное значение? Почему?
9. Назовите единицы измерения тока, напряжения, сопротивления и мощности.
10. Сформулируйте второй закон Кирхгофа.
11. Что такое расширенная матрица СЛАУ?
12. Какие методы поиска решений СЛАУ вам известны?
13. Если система имеет решения, то как определить, сколько их?
14. В чем смысл метода Гаусса решения СЛАУ?
15. Как найти токи при методом построения обратной матрицы?

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

6.1. Теория чисел. Краткий обзор.

Развитие цивилизации требует развития абстрактных научных взглядов на объекты природы, в первую очередь это относится к математике. Развитие теории чисел определяется теми *операциями*, которые необходимо производить с числами.

На заре человечества требовалось лишь операция «*счет*» для которого было достаточно *натуральных чисел* $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Натуральные числа можно было только складывать, однако, появление операции «*вычитание*» определило множество *целых чисел* $\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots\}$. Для целых чисел применимы операции «умножения», «деления нацело» и «остаток от деления». Появление операции «*дробь*» или «*деление*» обусловило появление множества *рациональных чисел* $\{a/b,\ \text{где } a,\ b - \text{целые числа}\}$. Рациональные числа можно умножать, делить и возводить в степень, но извлекать корень – нельзя. Операция «*извлечение корня из положительного числа*» определила множество *иррациональных* (или *действительных*) *чисел* $\{-\infty,\ +\infty\}$, изображаемых обычно в виде числовой прямой.

Ясно, что каждое последующее числовое множество включает в себя все предыдущие. Но как же быть с корнем из отрицательного числа? Придется построить очередное расширение множества вещественных чисел, но в математике существует строгая теорема, доказывающая, что никаких других чисел кроме действительных на числовой прямой нет.

Подойдем с другой стороны. Понятно, что $\sqrt{-16} = \sqrt{16\cdot(-1)} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$ и понятно, что любой корень из отрицательного числа может быть представлен в виде произведения некоторого действительного числа на $\sqrt{-1}$. Таким образом, корни из положительных и корни из отрицательных чисел могут быть получены друг из друга умножением на $\sqrt{-1}$, но при этом не смешиваются. Ясно, что определив $\sqrt{-1}$ мы сможем расширить множество чисел до множества *комплексных чисел*.

6.2. Комплексные числа

Комплексным числом называется число вида $z = x + i\cdot y$, где $x = \mathrm{Re}(z)$ и $y = \mathrm{Im}(z)$ – вещественные числа, а i – *мнимая единица*, определяемая равенством $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. Геометрическая интерпретация комплексного числа очевидна – каждому комплексному числу z соответствует точка на *комплексной плоскости* с координатами (x, y). Ось абсцисс называется *действительной осью*, ось ординат – *мнимой*.

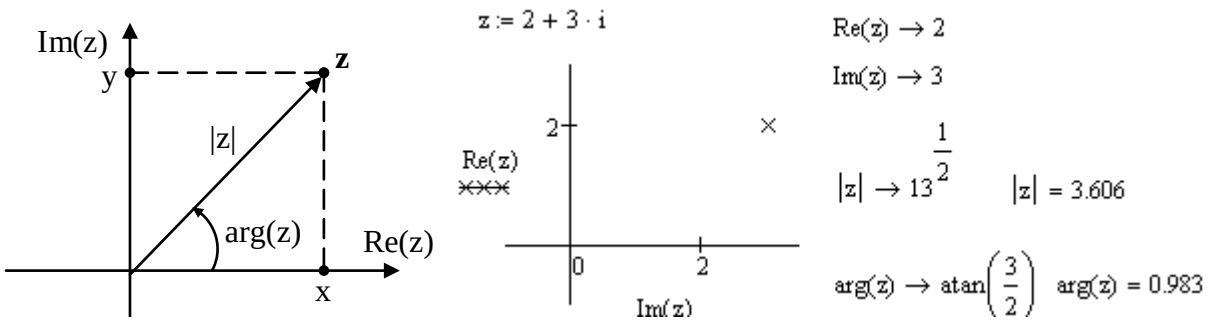


Рис. 24 – Представление комплексного числа в MathCAD

При вводе комплексных чисел в программе на *MathCAD* для ввода комплексной единицы необходимо всегда набирать **1i** или **1j**, в противном случае *MathCAD*

истолкует i или j как переменную. Когда курсор покидает выражение, содержащее **1i** или **1j**, *MathCAD* скрывает невидимую 1 и оставляет только **i**.

Понятно, что любую точку на плоскости можно записать в *декартовых* (x, y) координатах или в *полярных* (ρ, φ). Расстояние ρ от точки z до начала координат называется *модулем числа* z и обозначается $|z|$. Угол φ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z называется *аргументом числа* z и обозначается arg(z). По определению,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg(\varphi) = y/x \tag{22}$$

Если радиус-вектор числа z совершит полное число оборотов вокруг начала координат, то он совпадает с первоначальным положением, а угол φ увеличится на число кратное 2π. Совокупность всех этих углов называется *полным значением аргумента* и обозначается

$$Arg(z) = \varphi + 2k\pi, \ k\text{- целое}. \tag{23}$$

Из множества значений аргумента особо выделяется *главное значение аргумента* arg(z), удовлетворяющее неравенству $-\pi < \arg(z) \le \pi$, при этом:

$$\arg(z) = \begin{cases} arctg(y/x), & x > 0; \\ arctg(y/x) + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ arctg(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases} \tag{24}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Кроме алгебраической формы $z = x + iy$ часто используют *тригонометрическую форму* записи того же самого комплексного числа (здесь $\varphi = \arg(z)$):

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)). \tag{25}$$

Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, можно получить *показательную форму* любого комплексного числа, кроме $z = 0 + i \cdot 0$:

$$z = |z| e^{i\varphi}. \tag{26}$$

Нужно отдавать себе отчет, что классическое *декартовое представление* комплексного числа $z = x + i \cdot y$, *тригонометрическая форма* (25) и *показательная форма* (26) определяют ***одно и то же комплексное число***!

Рис. 25 иллюстрирует возможность перехода между этими тремя формами записи одного и того же числа.

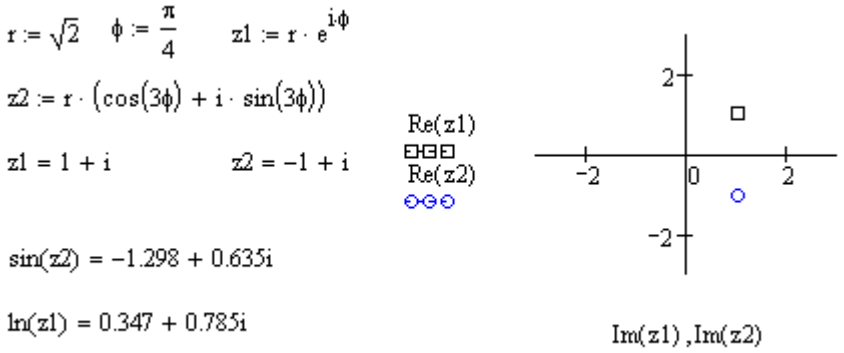


Рис. 25 – Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

6.3. Операции над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ осуществляются по формулам $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. Умножение, деление и возведение в степень удобнее производить в показательной форме. Пусть $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$, тогда произведение и частное:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad z_1 / z_2 = |z_1| / |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{27}$$

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (y_2 x_1 + y_1 x_2)$$

$$\frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

С помощью формулы Муавра $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$ можно получить формулу для степени числа:

$$z^n = \left(|z| e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right). \tag{28}$$

Корень n-ной степени из комплексного числа имеет n различных значений ($k = 0, 1, \ldots, n-1$):

$$w_k = \sqrt[n]{|z|\left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{29}$$

Геометрически эти n значений корня изображаются вершинами правильного n-угольника с полярными координатами $\left(\sqrt[n]{|z|} \quad \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}\right)$, (см. *Рис. 28*).

$z1 := 2 + 3 \cdot i \qquad z2 := 3 + 2 \cdot i$

$z1 + z2 \rightarrow 5 + 5 \cdot i$	$\arg(z1 + z2) = 0.785$	$\lvert z1 + z2 \rvert = 7.071$
$z1 - z2 \rightarrow -1 + i$	$\arg(z1 - z2) = 2.356$	$\lvert z1 - z2 \rvert = 1.414$
$z1 \cdot z2 \rightarrow 13 \cdot i$	$\arg(z1 \cdot z2) = 1.571$	$\lvert z1 \cdot z2 \rvert = 13$
$\frac{z1}{z2} \rightarrow \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot i$	$\arg\left(\frac{z1}{z2}\right) = 0.395$	$\left\lvert \frac{z1}{z2} \right\rvert = 1$

Рис. 26 – Операции над комплексными числами

6.4. Понятие комплексных функций

С точки зрения *MathCAD* нет разницы между вычислением вещественнозначной или комплексной функции. Трудности состоят в том, что обычный человек не может визуально представить себе функцию размерности больше 3, а комплексные функции отображают точку из двумерной комплексной плоскости в двумерную комплексную плоскость, т.е. четырехмерное изображение. Поэтому при работе с комплексными функциями пользуются аналитическими или табличными представлениями функций, но не графиками.

На рисунке (*Рис. 27*) схематично изображено множество *B*, называемое *образом множества A при воздействии на все его точки функцией* $\psi(z) \rightarrow w$, $z \in A$, $B = \psi(A)$. Множество *A* называется *прообразом* множества *B*. От функции $\psi(z)$.

По виду результирующего множества $\psi(A) = B$, (*образа множества A*) можно догадываться о поведении функции ψ и о ее свойствах (см. *Рис. 27*).

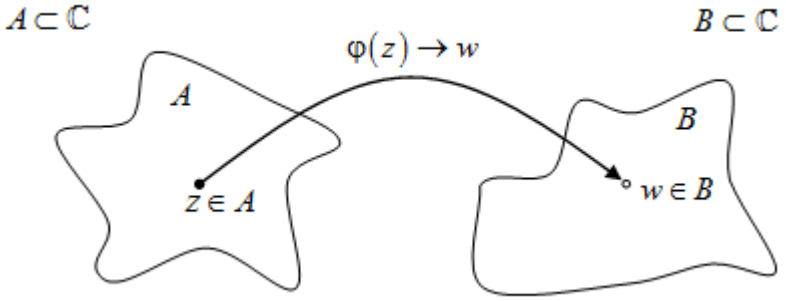


Рис. 27 – Представление комплексных функций

Комплексная переменная $w = \psi(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ называется *функцией комплексной переменной* $z = x + i \cdot y$, если каждому значению z из комплексной плоскости соответствует одно или несколько значений w. Здесь $u(z) = u(x, y)$ – *вещественная* и $v(z) = v(x, y)$ – *мнимая* части функции $w = \psi(z)$.

Многозначные функции

При использовании в комплексной области многие функции, о которых мы привыкли думать как о возвращающих одно значение, становятся *многозначными*, как, например в (29) для функции «корень *n*-ной степени из комплексного числа».

Общее правило состоит в том, что для многозначной функции *MathCAD* всегда возвращает значение, составляющее на комплексной плоскости самый маленький положительный угол с положительным направлением действительной оси. Оно называется *главным значением аргумента*. Единственное исключение из этого правила – оператор корня *n*-ной степени, описанный в (29) – этот оператор возвращает вещественный корень всякий раз, когда это возможно.

Например, если требуется вычислить $\sqrt[3]{-1}$, *MathCAD* вернёт -1, хотя кубическим корнем из -1, кроме того, являются числа 0.5+0.866**i** и 0.5-0.866**i.**

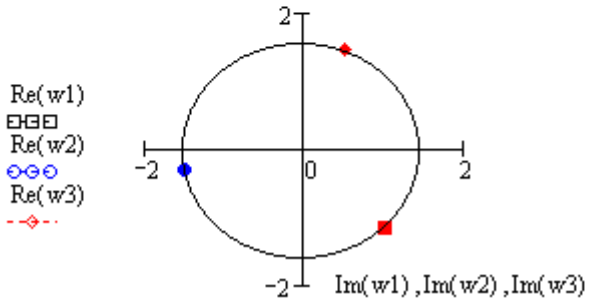
корень из комплексного числа - многозначная функция

$z := 2 + 3 \cdot i \qquad r := |z| \qquad r = 3.606 \qquad \phi := \arg(z) \qquad \phi = 0.983$

$$w1 := \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right)\right) \qquad w1 = -1.153 + 1.011i \qquad w1^3 = 2 + 3i$$

$$w2 := \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right)\right) \qquad w2 = -0.299 - 1.504i \qquad w2^3 = 2 + 3i$$

$$w3 := \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + 6\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi + 6\pi}{3}\right)\right) \qquad w3 = 1.452 + 0.493i \qquad w3^3 = 2 + 3i$$



$k := 1 .. 3$

$\sqrt[3]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\phi + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}} =$

-1.153+1.011i
-0.299-1.504i
1.452+0.493i

Рис. 28 – Пример многозначной функции $\sqrt[3]{2 + 3\mathbf{i}}$

Рассмотрим свойства некоторых элементарных функций комплексной переменной.

Линейная функция

$w(z) = a \cdot z + b$, где a и b – постоянные комплексные числа. Это отображение преобразует прямые в прямые (углы между прямыми сохраняются) и окружности в окружности.

Дробно-линейная функция

$w(z) = \dfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$, где a, b, c и d – постоянные комплексные числа. Это отображение преобразует окружность или прямую в окружность или прямую. Внутренняя область отображаемой окружности переходит во внутреннюю или во внешнюю область образа. Частный случай этой функции (a=d=0, b=c=1) – функция $w(z) = 1/z$, называется *инверсией*.

Экспонента

Экспоненциальная функция $e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos(y) - i \cdot \sin(y)\right)$ обладает следующими свойствами: $\left|e^z\right| = e^x$, $\arg(e^z) = y$. Линии $x = const$ преобразуются в окружности $|w| = const$, а линии $y = const$ – в лучи $\arg(w) = const$.

Тригонометрические и гиперболические функции

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}\right),\ \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right),\ \mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)},\ \mathrm{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)},$$

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),\ \mathrm{sh}(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),\ \mathrm{th}(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)},\ \mathrm{cth}(z) = \frac{\mathrm{ch}(z)}{\mathrm{sh}(z)}.$$

Логарифмическая функция

$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot (\arg(z) + 2k\pi),\ k \in \square$ определяется как обратная к экспоненциальной, бесконечнозначная функция. Дополнительно принимается, что $\mathrm{Ln}(0) = \infty$, и $\mathrm{Ln}(\infty) = \infty$.

Значение логарифма при k=0 называется главным значением логарифма и обозначается $\ln(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$. Поэтому $\mathrm{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i.$.

Обратные гиперболические и тригонометрические функции

$$\mathrm{Arcsin}(z) = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),\ \mathrm{Arccos}(z) = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),\ \mathrm{Arctg}(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\mathrm{Arcctg}(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{z + i}{z - i},\ \mathrm{Arsh}(z) = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),\ \mathrm{Arch}(z) = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\mathrm{Arth}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z},\ \mathrm{Arcth}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}.$$

Степенная и показательная функции

Если α и β – два комплексных числа, $\alpha \neq 0$, то степенная функция $w(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$ в силу основного логарифмического тождества

$$\alpha^\beta = e^{\beta \cdot \mathrm{Ln}(\alpha)} = e^{\beta \cdot (\ln\alpha + 2k\pi i)}.$$

Когда β – целое вещественное число, то степень имеет одно значение, т.к. $e^{2\beta k\pi i} = 1$. Если β – несократимая рациональная дробь p/q, $q > 1$, то степень имеет ровно q различных значений (29). Во всех других случаях степень имеет бесконечное множество значений.

6.5. Лабораторная работа №4. Комплексные вычисления

Продолжительность – 2 часа.

Цель работы

Освоить следующие умения, навыки, компетенции: представление о комплексном числе, комплексной функции, пространстве комплексных чисел. Умение вычислить вещественную и мнимую части аналитически и численно. Умение построить модуль и аргумент комплексного числа и функции. Умение записывать комплексное число в тригонометрической и показательной форме. Умение производить арифметические операции с элементами комплексного пространства. Умение оперировать с комплексными функциями.

Задание на практическую работу

1. Создать программу в среде *MathCAD*. Задать два произвольных комплексных числа ***c1*** и ***c2***, продемонстрировать операции сложения, умножения, деления комплексных чисел. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме. Построить все значения на графике в комплексной плоскости.

2. Для чисел ***c1*** и ***c2***, вычислить их аргументы и модули по формулам и сравнить со значениями, вычисленными посредством *MathCAD*.

3. Вычислить все корни *n*-ной степени произвольного комплексного числа ***c3***. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме. Построить все корни на графике в комплексной плоскости. Произвести проверку.

3. В соответствии с вариантом индивидуального задания (*Таблица 7*, *Приложение 4*), построить образ множества A при воздействии на него функцией $w = \psi(z)$. Построить не графике множества A и $\psi(A)$ в комплексной плоскости. Для многозначных функций – построить все значения. Вывести результат в декартовой, тригонометрической и показательной форме.

45. Составить отчет, в котором отразить листинг программного кода с комментариями и привести скриншоты с результатами работы программ.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить корень из отрицательного числа?
2. Как вы понимаете комплексное число? Как его представить / изобразить?
3. Как представляется комплексное число в декартовой и полярной системе координат?
4. Умеете ил вы строить модуль и аргумент комплексного числа?
5. Как извлечь корень из комплексного числа?
6. Сколько значений имеет корень пятой степени из 1? Нарисуйте их.
7. Как изучать комплексные функции?
8. Сможете ли вы записать комплексное число $4+3i$ в тригонометрической форме?
9. Как вычислить вещественную и мнимую части комплексного числа аналитически и численно? Возможно ли это без MathCAD?
10. Как записать комплексное число $4+3i$ в показательной форме?
11. Какие арифметические операции с элементами комплексного пространства можно производить?
12. Что такое многозначная функция? Приведите пример.
13. Как удобнее всего возвести комплексное число в степень?

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

7.1. Активные и реактивные элементы цепи переменного тока

Более детально данный материал будет изучаться в курсе Теоретических основ электротехники [30, 31]. В электротехнических системах, как правило, ток имеет синусоидальную (гармоническую) форму:

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [A]}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{I_0}$ – амплитуда [A], $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота [рад/с], φ – начальная фаза [рад], T – период колебаний [с]. График функции $i(t)$ приведен на *Рис. 29*.

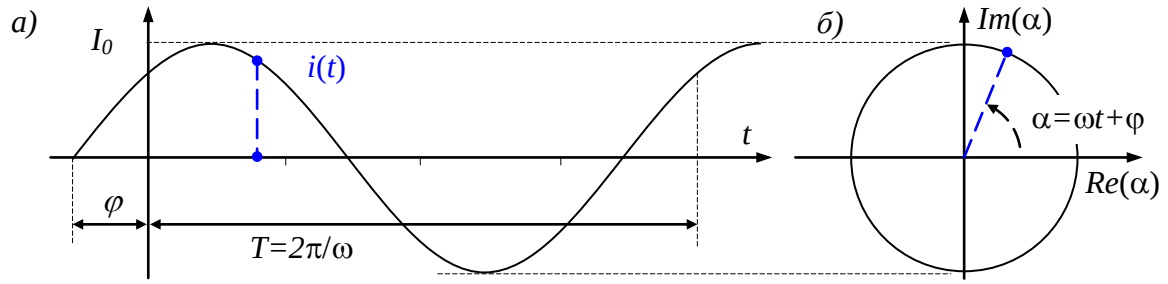


Рис. 29 – Представление гармонического сигнала а) в виде комплексной величины б)

Любая *гармоническая функция* полностью определяется тремя величинами: амплитудой, частотой и фазой.

Рассмотрим комплексную функцию $I_0 \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\alpha(t)}$, где $\alpha(t)$ – угол α (*Рис. 29,б*), линейно зависящий от времени t и начальной фазы φ: $\alpha(t) = \omega \cdot t + \varphi$. Выражение $\alpha(t) = \omega \cdot t + \varphi$ часто называется *мгновенной (полной) фазой* гармонического сигнала.

По формуле Эйлера это выражение может быть представлено в виде:

$$I_0 \cdot e^{\mathbf{i}\cdot(\omega t+\varphi)} = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + \mathbf{i} \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \tag{31}$$

Мнимая часть выражения (31) представляет собой выражение (30), так что можно записать его в виде

$$i(t) = \mathrm{Im}\left(I_0 \cdot e^{\mathbf{i}\cdot(\omega t+\varphi)}\right) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [A]}, \tag{32}$$

здесь функция Im(z) – взятие мнимой части комплексного числа. Выражение (32) фактически представляет собой проекцию вращающегося вектора $I_0 \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\alpha(t)}$ на мнимую ось (ординат), таким образом можно представить любой гармонический сигнал.

Элементы цепи переменного тока

Рассмотрим следующие элементы цепи переменного тока – катушка индуктивности, конденсатор и резистор. На данном этапе обучения будем рассматривать их в виде идеальных (абстрактных) моделей.

С точки зрения оказываемого переменному току *сопротивления*, элементы цепи разделяются на *активные* (резистор) и *реактивные* элементы (катушка индуктивности и конденсатор). Соответственно, сопротивление резистора называется *активным сопротивлением* – энергия на нем выделяется только в виде теплоты, а в реактивных элементах энергия в виде тепла не выделяется, но периодически запасается в электрическом или магнитном полях, сопротивление реактивных элементов называется *реактивным сопротивлением*.

Резистор (активное сопротивление)

При протекании по резистору R синусоидального тока вида (30), напряжение на резисторе (по закону Ома) равно

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [B]}. \tag{33}$$

Ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ имею одну и ту же начальную фазу, при этом говорят что они *совпадают по фазе* (*Рис. 30*). При протекании тока через активное сопротивление происходит потребление энергии из источника и выделение ее в виде тепла.

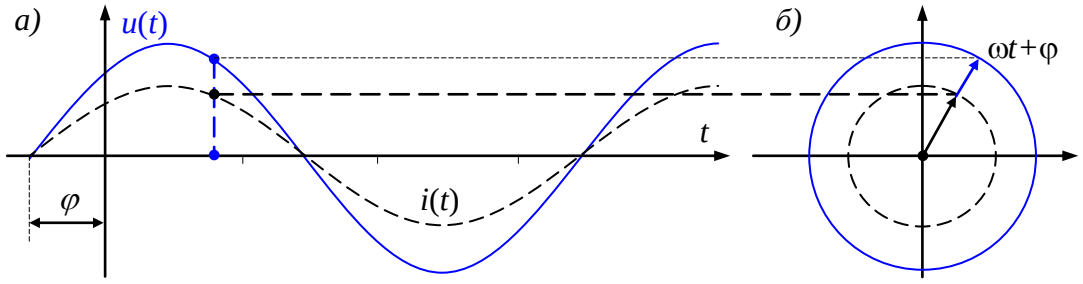


Рис. 30 – Ток и напряжение на резисторе

Катушка индуктивности

Для идеальной катушки индуктивности предполагается, что её активное сопротивление равно нулю и катушка обладает только индуктивностью L. При протекании по катушке индуктивности переменного тока вида (30), $i_L(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ [А], в ней наводится э.д.с. самоиндукции, равная

$$e_L(t) = -L\frac{di_L}{dt} \text{ [В].}$$

Согласно закону Ома $i_L(t) \cdot R = u_L(t) + e_L(t)$, поскольку R=0, то отсюда следует, что $u_L(t) = -e_L(t)$. Приложенное напряжение (равное по величине и противоположное по знаку наведенной э.д.с.) в точности уравновешивается электродвижущей силой самоиндукции.

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}\{I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\} = \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \text{ [В].}$$

Поскольку $\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha)$, получим:

$$u_L(t) = \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ [В].}$$

Здесь вводится величина

$$X_L = \omega \cdot L \text{ [Ом]} \qquad (34)$$

называемая *реактивным сопротивлением катушки индуктивности*, или кратко – *индуктивным сопротивлением*.

Для того, чтобы через катушку индуктивности протекал переменный ток необходимо, чтобы на ее выводах было напряжение, равное по величине и противоположное по знаку наведенной э.д.с.

$$u_L(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi + 90°) \text{ [В],} \qquad U_0 = X_L \cdot I_0 \text{ [В].} \qquad (35)$$

Напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90°, что иллюстрирует векторная диаграмма (*Рис. 31,б*).

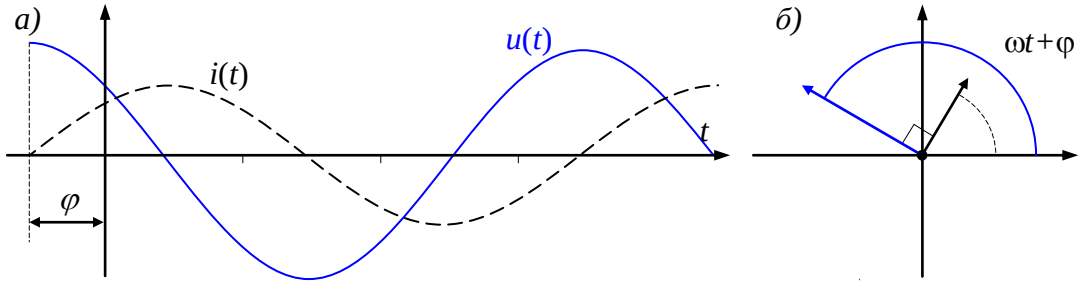


Рис. 31 – Ток и напряжение в катушке индуктивности

Конденсатор

Если к конденсатору C приложено напряжение $u_C(t)=U_0\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$, то конденсатор будет периодически перезаряжаться, что вызовет протекание тока через конденсатор:

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\omega\cdot C\cdot U_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)=\frac{U_0}{X_C}\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\ [\text{A}]. \qquad (36)$$

Здесь вводится величина X_C [Ом] называемая реактивным сопротивлением конденсатора, или кратко – *емкостным сопротивлением*.

$$X_C=\frac{1}{\omega\cdot C}\ [\text{Ом}] \qquad (37)$$

Обозначив $I_0=U_0/X_C$ [А], получим:

$$i_C(t)=I_0\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi+90°)\ [\text{A}].$$

Ток, протекающий через конденсатор, опережает напряжение по фазе на 90°, что иллюстрирует векторная диаграмма (*Рис. 32,б*).

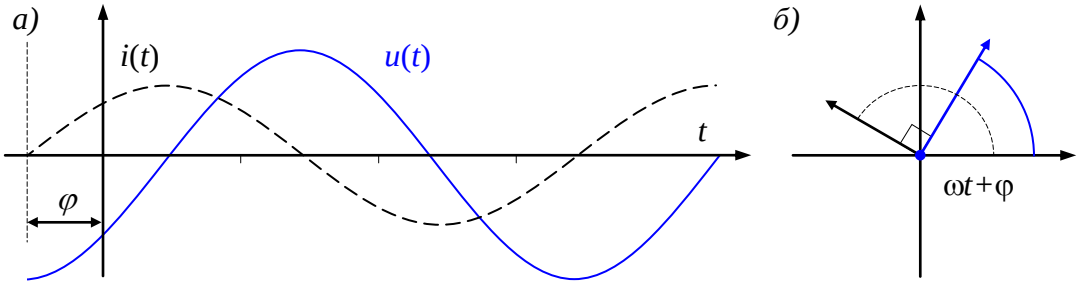


Рис. 32 – Ток и напряжение на конденсаторе

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника энергию, которая идет на создание электрического поля в нем. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля – запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику, затем процесс повторяется.

Полное комплексное сопротивление участка цепи

Рассмотрим теперь участок цепи, содержащий одновременно резистор, катушку индуктивности и конденсатор, как показано на рисунке *Рис. 33*

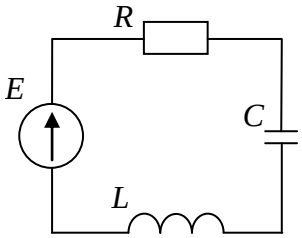


Рис. 33 – Участок цепи переменного тока

По второму закону Кирхгофа известно, что $u_R+u_L+u_C=e$, тогда

$$R\cdot i(t)+L\cdot\frac{di}{dt}(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\cdot dt=e(t)$$

Подставляя выражение для комплексной записи тока $i(t)=\mathrm{Im}\left(I_0\cdot e^{\boldsymbol{i}\cdot(\omega t+\varphi)}\right)$ и применяя правила дифференцирования и интегрирования экспоненты, получим:

$$I_0\left(R+\boldsymbol{i}\cdot L\cdot\omega-\boldsymbol{i}\frac{1}{C\omega}\right)=U_0 \qquad (38)$$

Ясно, что множитель перед I_0 представляет из себя в каком-то смысле сопротивление.

Комплексное сопротивление Z для участка цепи переменного тока (с частотой ω), обладающего активным сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью C в общем случае может быть записано в виде:

$$Z = Z_0 \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\omega} = R + \mathbf{i}\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) = R + \mathbf{i}\cdot\left(X_L - X_C\right) \text{ [Ом]}. \quad (39)$$

Ясно, что для участков цепей, в которых отсутствует резистор, конденсатор или катушка индуктивности, в формуле (39) будет отсутствовать соответствующее слагаемое – активное, емкостное или индуктивное сопротивление.

7.2. Полная мощность цепи переменного тока

Закон сохранения энергии определяет *баланс мощностей* в цепи переменного тока. Полная мощность $\boldsymbol{S}$ источников ЭДС (допустим, что их m штук) вычисляется как сумма произведений напряжения источников E_k на протекающие через них токи i_k. Естественно, полная мощность $\boldsymbol{S}$ измеряется в *вольт-амперах* [ВА].

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{m} E_k \cdot i_k \text{ [ВА]}. \quad (40)$$

Поскольку токи представляются комплексными величинами, то и мощность будет комплексной, а значит, ее можно представить как сумму действительной и мнимой частей (41):

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{i} \text{ [ВА]}. \quad (41)$$

Действительная часть $\boldsymbol{P} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{S})$ [Вт] называется активной мощностью и измеряется в *ваттах* [Вт], а мнимая часть полной мощности $\boldsymbol{Q} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{S})$ [ВАр] называется *реактивной мощностью* и измеряется в *варах* [ВАр] – «*вольт-амперах реактивной мощности*».

Активной потребляемой мощностью, рассеиваемой элементами схемы называется мощность, потраченная на активных элементах – резисторах. Вычисляется она, естественно, так же как и для цепей постоянного тока (21):

$$\boldsymbol{P}_{потр} = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot \left|i_k\right|^2 \text{ [Вт]}. \quad (42)$$

Реактивной потребляемой мощностью называется мощность, потраченная на реактивных элементах – конденсаторах и катушках индуктивности. Она не связана с выполнением полезной работы, а расходуется на создание электромагнитных полей в электродвигателях, трансформаторах, индукционных печах, сварочных трансформаторах, дросселях и пр. Вычисляется она, аналогично активной мощности (42), но вместо активных сопротивлений учитываются, разумеется, реактивные:

$$\boldsymbol{Q}_{потр} = \sum_{j=1}^{n1} X_{Lj} \cdot \left|i_j\right|^2 - \sum_{k=1}^{n2} X_{Ck} \cdot \left|i_k\right|^2 \text{ [ВАр]}. \quad (43)$$

Полная потребляемая мощность рассчитывается по формуле (41).

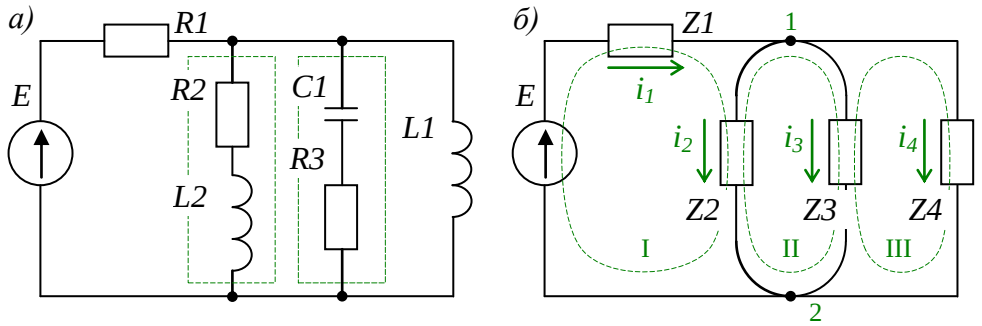
Баланс мощностей состоит в том, что произведенная активная мощность должна равняться сумме мощностей, потребляемых активными элементами цепи, а генерируемая реактивная мощность должна равняться сумме мощностей, расходуемых в реактивных элементах схемы.

7.3. Расчет электрической цепи синусоидального переменного тока

Расчет электрической цепи синусоидального переменного тока может быть сделан аналогично расчету токов цепи постоянного тока (*Лабораторная работа №3. Расчет цепи постоянного тока*), [30, 31]. Однако, в качестве сопротивлений реактивных элементов нужно брать, разумеется, их комплексные сопротивления, а токи и напряжения представлять в комплексной форме, по аналогии с (32).

Значения установившихся токов и напряжений цепи переменного тока можно рассчитать через законы Кирхгофа и закон Ома, справедливых для комплексных сопротивлений (39).

Рассмотрим этот метод на примере.



E = 220 [В]
ω = 314 [рад/с]
$L1$ = 0.1 [Гн]
$L2$ = 0.2 [Гн]
$C1$ = 10^{-4} [Ф]
$R1$ = 10 [Ом]
$R2$ = 50 [Ом]
$R3$ = 100 [Ом]

Рис. 34 – Расчет цепи переменного тока

1) Построим комплексные сопротивления Z участков цепи по определению (39). На *Рис. 34,а* пунктирными прямоугольниками отмечены участки, на которых комплексное сопротивление имеет и активную (R), и реактивную (X) составляющие. $Z1 = R1$; $Z2 = R2 + \mathbf{i} \cdot X_{L2}$; $Z3 = R3 - \mathbf{i} \cdot X_{C1}$; $Z4 = \mathbf{i} \cdot X_{L1}$. Зададим параметры схемы и вычислим реактивные сопротивления X_{L1}, X_{L2} и X_{C1} по формулам (34), (37):

ORIGIN := 1 E1 := 220 [В] ω := 314 [рад/с] R1 := 10 [Ом] R2 := 100 [Ом]

L1 := 0.1 [Гн] L2 := 0.2 [Гн] C1 := 10^{-4} [Ф] R3 := 50 [Ом]

реактивные сопротивления элементов			комплексные сопротивления		
XL1 := ω·L1	XL1 = 31.4	[Ом]	Z1 := R1	Z1 = 10	[Ом]
XL2 := ω·L2	XL2 = 62.8	[Ом]	Z2 := R2 + i·XL2	Z2 = 100 + 62.8i	[Ом]
XC1 := $\frac{1}{\omega \cdot C1}$	XC1 = 31.847	[Ом]	Z3 := R3 − i·XC1	Z3 = 50 − 31.847i	[Ом]
			Z4 := i·XL1	Z4 = 31.4i	[Ом]

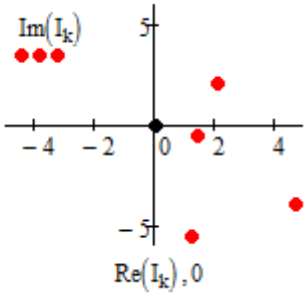
2) Построим уравнения (и матрицы) для нахождения токов по законам Кирхгофа:
(1): i_1-i_2-i_3-i_4=0; (I): U_{Z1}+U_{Z2}=E; (II): U_{Z3}-U_{Z2}=0; (III): U_{Z4}-U_{Z3}=0.

3) Выпишем матрицы и вычислим токи на участках рассматриваемой цепи переменного тока:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ Z1 & Z2 & 0 & 0 \\ 0 & -Z2 & Z3 & 0 \\ 0 & 0 & -Z3 & Z4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ E1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := A^{-1} \cdot B \quad I = \begin{pmatrix} 4.75 - 3.878i \\ 1.412 - 0.499i \\ 2.103 + 2.115i \\ 1.235 - 5.494i \end{pmatrix} [A]$$

Рассчитаем модули и аргументы токов в комплексном представлении

$$k := 1..4 \quad |I_k| = \begin{pmatrix} 6.131 \\ 1.497 \\ 2.983 \\ 5.631 \end{pmatrix} \quad \arg(I_k) = \begin{pmatrix} -0.685 \\ -0.34 \\ 0.788 \\ -1.35 \end{pmatrix}$$



На графике справа красными точками обозначены 4 комплексных числа – искомые токи в комплексной интерпретации. Амплитуда переменных токов определяется как в формуле (32) их модулями $|I_k|$, а начальная фаза – аргументами $\arg(I_k)$.

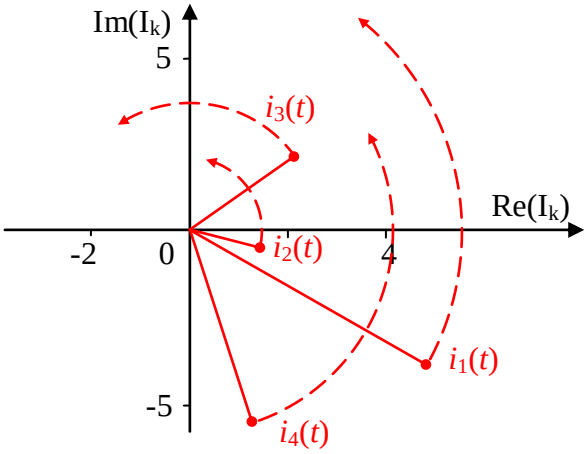


Рис. 35 – Токи в цепи переменного тока представленные в виде вращающихся комплексных векторов

Обратите внимание, что выражение (32) описывает *переменные токи*, поэтому представляет собой проекции *вращающихся векторов* $|I_k| \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\arg(I_k))}$ как функции от времени. Красные точки задают *начальную фазу* движения (в начальный момент времени $t_0 = 0$), в дальнейшем, при изменении времени t фаза вектора будет изменяться по закону $\omega \cdot t + \arg(I_k)$ с частотой ω, как показано на *Рис. 35*.

Таким образом можно представить любой гармонический сигнал. Отобразим переменные токи как функции от времени (*Рис. 36*):

$k := 1..4 \qquad Ik(t,k) := |I_k| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_k))$

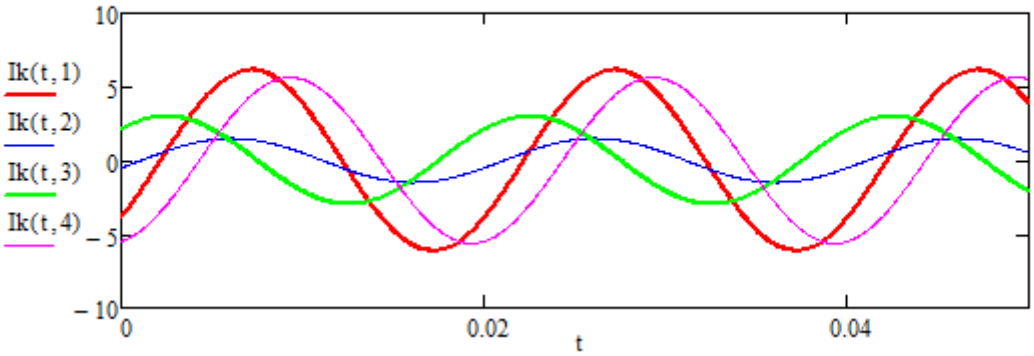


Рис. 36 – Токи в цепи переменного тока

4) Рассчитаем и представим на графике напряжения на всех активных и реактивных элементах исследуемой цепи в виде векторной диаграммы комплексных величин (*Рис. 37, а*) и в виде функций от времени (*Рис. 37, б*).

$$U := \begin{pmatrix} E1 \\ R1 \cdot I_1 \\ R2 \cdot I_2 \\ i \cdot XL2 \cdot I_2 \\ -i \cdot XC1 \cdot I_3 \\ R3 \cdot I_3 \\ i \cdot XL1 \cdot I_4 \end{pmatrix} \text{ [В]} \qquad U = \begin{pmatrix} 220 \\ 47.496 - 38.776i \\ 141.177 - 49.883i \\ 31.327 + 88.659i \\ 67.356 - 66.973i \\ 105.148 + 105.749i \\ 172.504 + 38.776i \end{pmatrix} \qquad k := 1..7 \qquad Uk(t,k) := \left|U_k\right| \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \arg\left(U_k\right)\right) \text{ [В]}$$

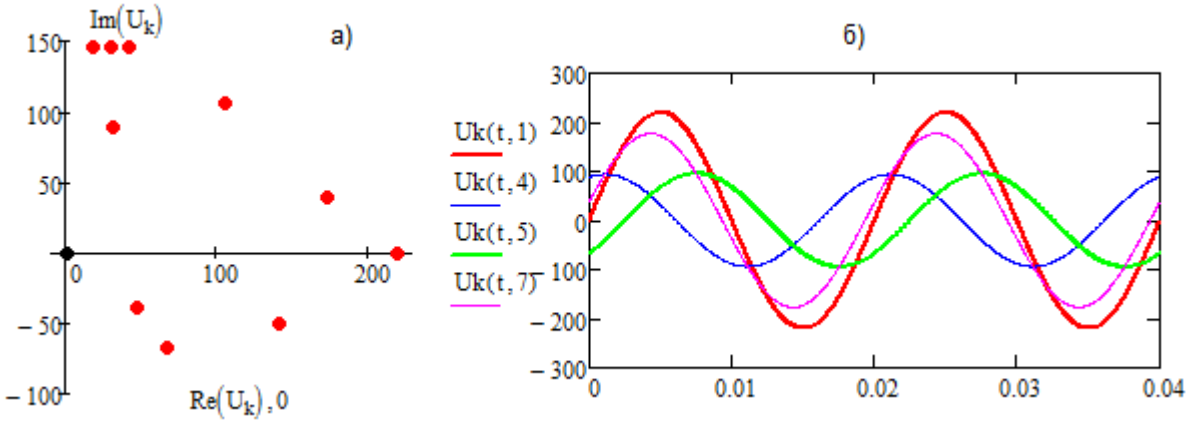


Рис. 37 – Напряжения в цепи переменного тока

5) Проверим правильность произведенных вычислений двумя способами. Во-первых, можно проверить выполнимость законов Кирхгофа для любого момента времени – сумма токов в узле должна равняться нулю, а сумма напряжений в любом контуре – сумме источников ЭДС. Для примера рассчитаем и построим на графике следующую функцию:

$$sumU(t) := Uk(t,2) + Uk(t,3) + Uk(t,4) - Uk(t,1)$$

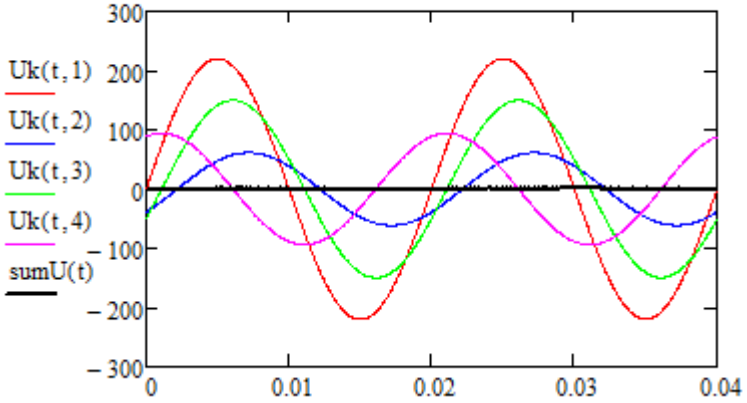


Рис. 38 – Сумма падений напряжения в 1 контуре в любой момент времени

Как видно из графика (*Рис. 38*), функция *sumU*(*t*), представляющая собой сумму четырех различных по амплитуде и фазе синусоид, в любой момент времени имеет нулевое значение.

Проверка законов Кирхгофа для исследуемой схемы *(а)* в комплексном представлении *(б)* и в мгновенных значениях *(в)* – в любой заданный момент времени *t*:

(а) *(б)* *(в)*

$U_{R2}+U_{L2}-U_{C1}-U_{R3}=0$	$U_3+U_4-U_5-U_6=0$	$t := 0.02$
$U_{C1}+U_{R3}-U_{L1}=0$	$U_5+U_6-U_7=0$	$Ik(t,1)-Ik(t,2)-Ik(t,3)-Ik(t,4)=0$
$U_{R1}+U_{R2}+U_{L2}=E$	$U_2+U_3+U_4=220$	$Uk(t,5)+Uk(t,6)-Uk(t,7)=-0$
$i_1-i_2-i_3-i_4=0;$	$I_1-I_2-I_3-I_4=0$	$Uk(t,2)+Uk(t,3)+Uk(t,4)-Uk(t,1)=0$

При проверке уравнений, составленных по законам Кирхгофа для исследуемой схемы в мгновенных значениях *(в)* случайным образом задан момент $t = 0.02$ [с], однако, можно произвести проверку в любой другой момент времени.

6) Во-вторых, рассчитаем *баланс мощностей* в схеме по формулам (40)-(43), построив полную мощность источников энергии Sист [ВА] и полную суммарную мощность всех потребителей Sпотр [ВА].

$Sист := U_1 \cdot I_1$	$Sист = 1044.918 - 853.072i$ [ВА]
$Pист := Re(Sист)$	$Pист = 1044.918$ [Вт]
$Qист := Im(Sист)$	$Qист = -853.072$ [ВАр]
$Pпотр := R1 \cdot (\lvert I_1 \rvert)^2 + R2 \cdot (\lvert I_2 \rvert)^2 + R3 \cdot (\lvert I_3 \rvert)^2$	$Pпотр = 1044.918$ [Вт]
$Qпотр := XL2 \cdot (\lvert I_2 \rvert)^2 - XC1 \cdot (\lvert I_3 \rvert)^2 + XL1 \cdot (\lvert I_4 \rvert)^2$	$Qпотр = 853.072$ [ВАр]
$Sпотр := Pпотр + i \cdot Qпотр$	$Sпотр = 1044.918 + 853.072i$ [ВА]

Можно видеть, что активная мощность источника равняется сумме мощностей, потребляемых активными элементами цепи, а реактивная мощность источника равняется по модулю сумме мощностей, потребляемых реактивными элементами схемы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа для цепи переменного тока.
2. Как связано напряжение, сопротивление и ток в резисторе?
3. Назовите единицы измерения тока, напряжения, сопротивления и мощности.
4. Сформулируйте закон сохранения энергии в приложении к балансу мощностей цепи переменного тока.
5. Что такое полное сопротивление участка цепи? Запишите формулу.
6. Сформулируйте закон Ома для цепи переменного тока.
7. Как связано векторное (комплексное) представление напряжения и форма его гармонического сигнала?
8. Назовите единицы измерения полной, активной и реактивной мощностей. Как они связаны?
9. Как вычисляется активная мощность источника?
10. Сформулируйте баланс мощностей в цепи переменного тока.
11. Полная мощность. По каким формулам можно вычислить мощность?
12. Как связано напряжение, сопротивление и ток в конденсаторе?
13. Сформулируйте второй закон Кирхгофа для цепи переменного тока.
14. Как связано напряжение, сопротивление и ток в катушке индуктивности?

7.4. Лабораторная работа № 5. Расчет цепи переменного тока

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Закрепление умений и навыков по работе с комплексными числами. Актуализация математических компетенций в предметной области направлений электроника, наноэлектроника, электротехника, физика. Развитие творческого, осознанного подхода к решению систем уравнений с комплекснозначными величинами. Получение навыков рассуждения и анализа полученных результатов.

Представление понятий школьного курса физики, раздел «Электричество и магнетизм» в комплексной форме. Практическое осознание закона сохранения энергии. Вырабатывание стратегического, аналитического взгляда на прикладные задачи и практического подхода к теоретическим знаниям.

Задание на лабораторную работу

1. Рассчитать токи и напряжения для заданной в индивидуальном задании цепи (*Таблица 9, Приложение 4*). Номиналы элементов цепи выбрать в соответствии с вариантом (*Таблица 8, Приложение 4*).
2. Отобразить рассчитанные значения в виде векторной диаграммы в пространстве комплексных чисел и в виде функций от времени.
3. Произвести проверку для всех уравнений, составленных по законам Кирхгофа в комплексной форме и в мгновенных значениях. Построить суммарные токи в узлах и сумму падений напряжений в контурах на графиках.
4. Рассчитать баланс мощностей рассматриваемой схемы.
5. Составить отчет, в котором отразить последовательность расчетов токов и напряжений рассматриваемой схемы, провести проверку, привести скриншоты с результатами работы программы.
6. Демонстрационный пример расчета цепи переменного тока приведен в приложениях (*Приложение 7*).

Контрольные вопросы

1. Что такое активное сопротивление, как оно связано с полным сопротивлением участка цепи переменного тока?
2. Могут ли токи иметь отрицательное значение в цепи переменного тока?
3. На что расходуется энергия активного сопротивления участка цепи? Как вычисляется величина потраченной мощности?
4. Как изменяется вектор комплексного представления тока при изменении времени?
5. Что такое реактивное сопротивление, какое оно бывает? Как оно связано с полным сопротивлением участка цепи переменного тока?
6. В чем состоит идея представления гармонического сигнала комплексной переменной? Как изменяется угол?
7. Как связано векторное (комплексное) представление тока и форма его гармонического сигнала?
8. На что расходуется энергия реактивного элемента цепи? Как вычисляется величина потраченной мощности?
9. Чем отличается мгновенная (полная) фаза сигнала от начальной его фазы? Запишите формулу.

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Большинство научно-технических задач в области электроники и наноэлектроники (особенно, относящихся к анализу динамических систем и их математическому моделированию) базируются на решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Практически любой физический закон, включающее величины, *изменяющиеся с течением времени* содержит информацию о *скорости изменения* этих величин (производные), а следовательно описывается дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, включающее в себя не только неизвестные функции, но и их производные относительно некоторых свободных переменных.

Решить дифференциальное уравнение – это записать в явном виде все функции, входящие в ДУ и все их производные, сводящие уравнение к тождеству. Иногда решения ищутся в виде *явных* формул, но чаще их удается представить лишь *в приближенном виде* или же получить о них качественную информацию. Часто бывает трудно установить, существует ли решение вообще, не говоря уже о том, чтобы найти его, в этой связи использование математических пакетов незаменимо.

Если в уравнение входит только первая производная, то оно называется ДУ *первого порядка*, если еще и вторая производная, то – второго, и т.д.

Если уравнение имеет производные относительно только одной *свободной переменной*, то оно называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением*** (ОДУ), а если оно включает в себя производные по различным переменным, то называется ***дифференциальным уравнением в частных производных*** (ДУЧП). В этом курсе ДУЧП не рассматриваются.

Общий вид ОДУ n-ного порядка: $F\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^ny(t)}{dt^n}\right) = 0$. (44)

Рассмотрим для начала ОДУ первого порядка:

$$F\left(t, y(t), y'(t)\right) = 0, \text{ где } y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (45)$$

Если в уравнении (45) удается явно выразить производную $y'(t)$ и вынести ее в левую часть, то такое дифференциальное уравнение называется *явно заданным*:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (46)$$

Процесс решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием*** и это понятно, ведь для нахождения первообразной функции по известной производной требуется ее проинтегрировать. Но этим решение ДУ *не ограничивается (!)*, поскольку известно, что первообразную можно найти только *с точностью до константы*:

$$\int\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)dt = y(t) + C. \quad (47)$$

Таким образом, решением задачи (45) является не одна функция $y(t)$, а целое *семейство* таких функций, отличающихся константой (а в некоторых случаях – целый набор таких семейств функций). Каждая отдельная функция называется *интегральной кривой* (или *частным решением*), в то время как зависимость описывающая *все (!)* возможные частные решения – называется *общим решением*.

Решить ДУ, это значит описать именно общее решение, однако на практике, в задачах электродинамики и т. п., зачастую требуется выбрать из семейства решений одно единственное, обладающее *дополнительными свойствами*. Эти свойства позволяют задаться точным значением константы C из (47). Такая постановка задачи называется *задачей Коши*, а дополнительные свойства частного решения как правило задаются *начальными условиями*.

Задача Коши для ОДУ первого порядка формулируется таким образом:

Найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую ОДУ $\dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y)$ (48)

и начальным условиям $y(t_0) = y_0$,

где y_0 – значение функции $y(t)$ в момент времени t_0.

Из курса высшей математики (раздел «Теория дифференциальных уравнений») известно, что ОДУ n-ного порядка (44) может быть без ограничения общности сведено к *системе n дифференциальных уравнений* первого порядка. Для этого достаточно произвести следующие обозначения (замены):

$$y_1(t) \equiv y(t),\ y_2(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt},\ y_3(t) \equiv \frac{d^2y(t)}{dt^2},\ \ldots,\ y_n(t) \equiv \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^n}. \tag{49}$$

И, подставив их в задачу Коши (48), получить n уравнений относительно n функций

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = y_3(t); \\ \ldots \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t); \\ y_n'(t) = f(t, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}). \end{cases} \quad \text{с начальными условиями} \quad \begin{cases} y_1'(t_0) = y_{0,1}; \\ y_2'(t_0) = y_{0,2}; \\ \ldots \\ y_{n-1}'(t_0) = y_{0,n-1}; \\ y_n'(t_0) = y_{0,n}. \end{cases} \tag{50}$$

Проблема аналитического поиска решений задач (48) и (50) рассматривается в курсе высшей математики в разделе «Теория дифференциальных уравнений», а методы поиска численных решений задач (48) и (50) изучаются в разделе «Вычислительная математика».

8.1. Численные методы решения ОДУ

Численные методы решения ОДУ основаны на замене производных, входящих в уравнение, разностными функциями различного вида и поиске приближенных значений функции $y(t)$ на некотором наборе точек t_i, $i = 0..m$ – сетке. Интервал между соседними точками называется шагом интегрирования $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Значения функции $y(t)$ в точке t_0 задается начальными условиями задачи Коши $y(t_0) = y_0$.

Метод Эйлера.

Зададим интервал, на котором будем искать решение $[t_0, t_m]$, где m – число точек разбиения интервала на узлы сетки с шагом $\Delta t = (t_m - t_0)/m$. Построим сетку: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Для каждого узла сетки t_{i+1} будем искать значение $y(t_{i+1})$ как некоторую рекуррентную зависимость от значений функции $y(t_i)$ в предыдущей точке t_i.

По определению, производная функции – это предел отношения приращения функции $y(t + \Delta t) - y(t)$ к приращению аргумента Δt, когда последний стремится к нулю. Заменим производную, входящую в (48) рекуррентным соотношением в соответствии с определением:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \tag{51}$$

Запишем теперь Задачу Коши (48) в точках t_i и t_{i+1} сетки с учетом замены (51):

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \approx f(t_i, y_i),\ i = 0,..,m-1. \tag{52}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} & y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i) \cdot \Delta t \\ & y(t_0) = y_0; \\ & t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad i = 0,..,m-1 \end{aligned} \qquad (53)$$

Выражение (53) называется *явным методом Эйлера*. Решим в *MathCAD* простейшее дифференциальное уравнение $y'(t) = t \cdot y(t)$ по методу (53) на участке $[0,1]$ с начальными условиями $y(0) = 1$. Аналитическое решение заданного ОДУ известно:

$$y(t) = C \cdot e^{\frac{t}{2}}.$$

С учетом начальных условий вычислим C= 1. Точное решение позволит оценить погрешность данного численного метода, которая, в общем, пропорциональна $(\Delta t)^2$.

Листинг 35. Решение ОДУ по явному методу Эйлера

$n := 10$

$\Delta t := \frac{(1-0)}{n}$ $\quad \Delta t = 0.1$

$f(t,y) := t \cdot y$

$i := 0..n-1$

$\begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + \Delta t \\ y_i + \Delta t \cdot f(t_i, y_i) \end{pmatrix} \quad z(t) := e^{\frac{t^2}{2}}$

t =

0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

y =

0	1
1	1
2	1.01
3	1.03
4	1.061
5	1.104
6	1.159
7	1.228
8	1.314
9	1.419
10	1.547

Вектор t содержит узлы сетки, а вектор y – найденные значения функции $y(t_i)$ в узловых точках сетки. Построим эти точки на графике и для сравнения – значения аналитического решения $z(t_i)$ заданного ОДУ в этих же точках:

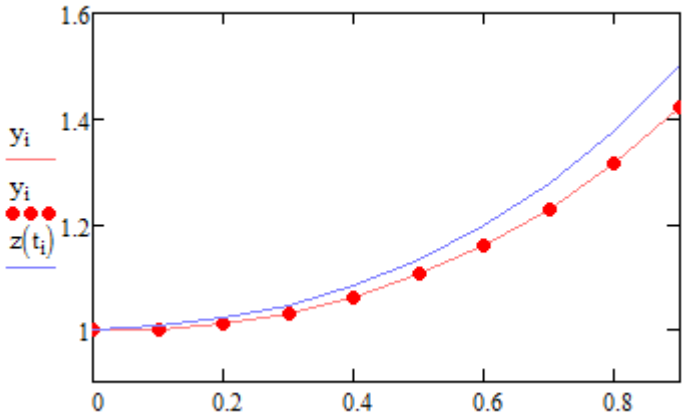
Листинг 36. Погрешность решения ОДУ по явному методу Эйлера

$z(t_i) =$

1
1.005
1.02
1.046
1.083
1.133
1.197
1.278
1.377
1.499

$|y_i - z(t_i)| =$

0
$5.013 \cdot 10^{-3}$
0.01
0.016
0.022
0.03
0.038
0.049
0.063
0.08



Анализ полученных результатов подтверждает, что ошибка увеличивается квадратично с ростом t. Для уменьшения погрешности следует уменьшать шаг интегрирования или применять другие итерационные методы решения ОДУ.

Модифицированный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t \cdot f(t_i, y_i)}{2}\right) \cdot \Delta t, \quad . \qquad (54)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \qquad i = 0,..,m-1$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k(t_i, y_i)}{6}, \quad k_1(t,y) = \Delta t \cdot f(t,y), \quad k_2(t,y) = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{k_1(t,y)}{2}\right),$$

$$k_3(t,y) = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{k_2(t,y)}{2}\right), \quad k_4(t,y) = \Delta t \cdot f(t + \Delta t, y + k_3(t,y)), \quad . \qquad (55)$$

$$k(t,y) = k_1(t,y) + 2k_2(t,y) + 2k_3(t,y) + k_4(t,y);$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \qquad i = 0,..,m-1.$$

Встроенные методы решения ОДУ

В вычислительное ядро встроенной функции решения ОДУ – *Odesolve* заложен метод Рунге-Кутты четвертого порядка (55). Данная функция имеет следующий формат:

Given

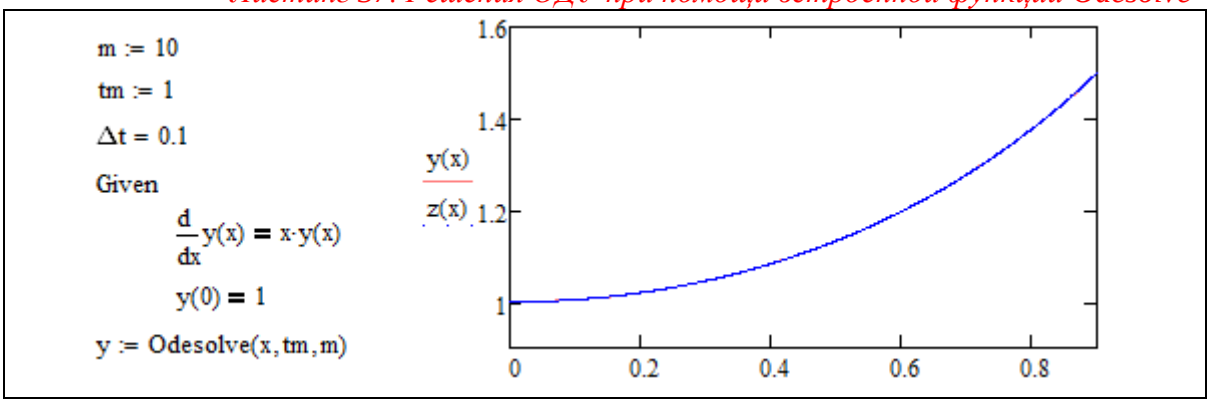
ОДУ или система ОДУ — *Равенства должны быть записаны в виде логических операторов*

Начальные условия

Odesolve(*t*, *tm*, *m*)

Здесь *t* – имя переменной, относительно которой решается уравнение, *tm* – конец интервала интегрирования, *m* – число шагов интегрирования.

Листинг 37. Решения ОДУ при помощи встроенной функции Odesolve



Визуально точное и численное решения полностью совпали. Читателю предлагается самостоятельно вычислить погрешность данного метода по аналогии с примером выше (см. *Листинг 36*).

Встроенные методы решения систем ОДУ

Для численного решения систем ОДУ (50) в MathCAD введен большой набор функций:

Функция MathCAD	***Численные методы***
rkfixed(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*)	Метод Рунге-Кутты с постоянным шагом.
rkadapt(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*)	Метод Рунге-Кутты с переменным шагом. В зависимости от скорости изменения функции шаг интегрирования автоматически «подбирается».
bulstoer(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*)	Метод Булирша-Штера – позволяет получать более точные решения, чем *rkfixed*, затрачивая на это меньшее число шагов (для гладких, медленно меняющихся систем)
BDF(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*)	Неявный многошаговый метод для решения жестких,

	быстро изменяющихся систем ОДУ
AdamsBDF(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*)	Комбинированный метод, использующий BDF для жестких систем и метод Адамса – для нежестких
Stiffr(*y*0, *t*0, *tm*, *m*, *D*, *AJ*)	Метод Розенброка с расширенной функцией Якоби *AJ* для жестких систем

Здесь $t0$, tm – границы интервала интегрирования, $y0$ – вектор начальных условий (50), m – число шагов интегрирования. D – векторная функция размера $N\times1$ скалярного аргумента t и векторного y, причем, вектор $y0$ и искомая функция $y(t)$ так же имеют размерность $N\times1$.
N – порядок системы уравнений.

Расширенная матрица Якоби AJ имеет размерность $N\times(N+1)$. Её первый столбец содержит производные $\partial D_i/\partial t$, остальные строки и столбцы представляют собой матрицу Якоби $\partial D_i/\partial y_k$ системы ОДУ. Например, если

$$D(t,y)=\begin{pmatrix} ty_1 \\ -2y_1y_2 \end{pmatrix}, \text{ то } AJ(t,y)=\begin{pmatrix} y_1 & t & 0 \\ 0 & -2y_2 & -2y_1 \end{pmatrix}.$$

Каждая из приведенных функций возвращает решение в виде матрицы $(m+1)\times(N+1)$: в ее левом столбце находятся значения узлов сетки t_i, а в остальных N столбцах – значения искомых функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_N(t)$, рассчитанные в этих узлах. Поскольку всего точек помимо начальной m, то строк в матрице – $m+1$.

8.2. Переходный процесс в электрической схеме

Переходные процессы – это процессы, возникающие в электрических цепях при различных воздействиях, приводящих к изменению их режима работы, то есть при действии различного рода коммутационной аппаратуры, например, ключей, переключателей для включения или отключения источника или приёмника энергии, при обрывах в цепи, при коротких замыканиях отдельных участков цепи и т. д.

Физическая причина возникновения переходных процессов в цепях — наличие в них *катушек индуктивности и конденсаторов*, то есть *индуктивных и ёмкостных элементов* в соответствующих схемах замещения. Объясняется это тем, что энергия магнитного и электрического полей этих *реактивных элементов* не может изменяться скачком при коммутации (процесс замыкания или размыкания выключателей) в цепи.

Реактивные элементы – элементы, способные накапливать электрическую энергию и отдавать ее либо источнику, от которого эта энергия была получена, либо передавать другому элементу. В любом случае этот элемент не превращает электрическую энергию в тепловую.

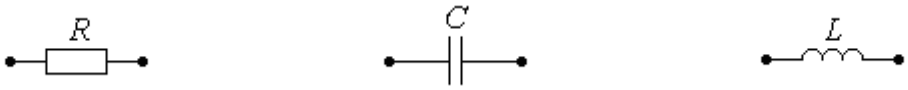
Переходный процесс в цепи описывается системой дифференциальных уравнений. Переходный процесс бывает *неоднородным*, если схема замещения цепи содержит источники ЭДС и тока, и *однородным* – если не содержит. Переходный процесс называется *линейным (нелинейным)* для линейной (нелинейной) электрической цепи.

Подчеркнем еще раз, что *переходные процессы не могут протекать мгновенно*, так как невозможно в принципе мгновенно изменять энергию, накопленную в электромагнитном поле цепи. Теоретически переходные процессы заканчиваются за время $t\to\infty$. Практически же переходные процессы являются быстропротекающими, и их длительность обычно составляет доли секунды. Так как энергия магнитного W_M и электрического полей $W_Э$ описывается выражениями

$$W_M = L\cdot\frac{i^2}{2} \text{ и } W_Э = C\cdot\frac{u^2}{2}, \tag{56}$$

то ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно. На этом основаны законы изменения тока и напряжения.

Законы изменения тока и напряжения в активных (резистор) реактивных (катушка индуктивности и конденсатор) элементах описываются формулами (57):

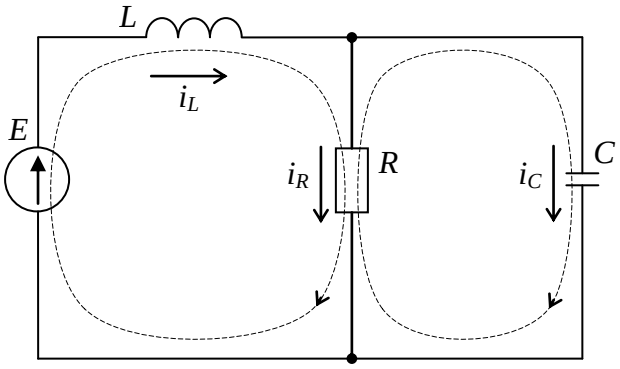


$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} \qquad i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)dt \qquad (57)$$

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt \qquad u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

С использованием известных законов Ома и Кирхгофа, с учетом формул (57), строится система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая процесс изменения токов и напряжений в реактивных элементах – *переходный процесс от начальных условий X_0 до установившегося режима работы*.

В качестве примера решения ОДУ рассчитаем переходный процесс в электрической схеме, приведенной на *Рис. 39*.



$L = 0.01$ *Гн*
$C = 10^{-6}$ *Ф*
$R = 100$ *Ом*
$E = 100$ *В*

Рис. 39 – Схема замещения

Система дифференциальных уравнений, описывающих данную схему строится на основе законов (17)-(19), а так же зависимостей относительно тока и напряжения в L и C (57).

Выражая из полученных зависимостей относительно I и II законов Кирхгофа токи в активных элементах (резисторах) до тех пор, пока не останется столько дифференциальных уравнений, сколько реактивных элементов в схеме (в нашем примере – 2).

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C}\left(i_L - \dfrac{u_C}{R}\right); \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}(E - u_C). \end{cases} \quad X(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (58)$$

После того, как система ОДУ выписана в явном виде – в левой части только производные, в правой (58) – все остальное, строится матрица системы $D(t,x)$. И решается система ОДУ изученными ранее методами.

Решим полученную систему дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями, результат вычислений будет представлять собой графики переходного процесса тока и напряжения в электрической схеме, приведенной на *Рис. 39*. Решение будем искать численно по методу Рунге-Кутта.

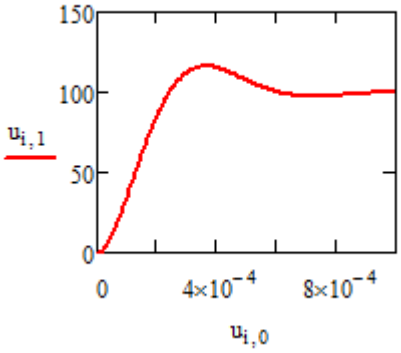
Полученный результат будет представлять собой массив точек, который, при необходимости, можно сгладить методами интерполяции.

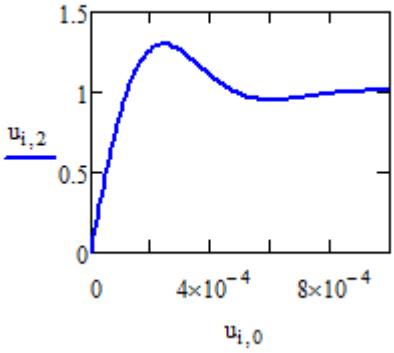
Листинг 38. Решения ОДУ. Построение переходного процесса

$L := 0.01 \qquad C := 10^{-6} \qquad R := 100 \qquad E := 100 \qquad m := 100$

$$D(t,x) := \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - \dfrac{x_0}{R}}{C} \\ \dfrac{E - x_0}{L} \end{pmatrix} \qquad x0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u := \mathrm{rkfixed}\left(x0, 0, 10^{-3}, m, D\right)$$

$i := 0..m-1$





В данном примере переходный процесс имеет перерегулирование и завершается в течении приблизительно $2*10^{-4}$ с, сходясь к постоянному значению тока и напряжения, которые не имеют гармонических колебаний.

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что понимается под термином решение дифференциального уравнения?
3. Что такое задача Коши?
4. Как влияют начальные условия на решение дифференциального уравнения?
5. Что такое общее (полное) решение дифференциального уравнения?
6. Что является частным решением задачи Коши?
7. Какие численные методы решения ДУ вы знаете? В чем их смысл?
8. Что такое интегральная кривая?
9. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
10. Что называется дифференциальным уравнением в частных производных?
11. Что такое система дифференциальных уравнений?
12. Что является решением системы дифференциальных уравнений?
13. Как задаются начальные условия для системы дифференциальных уравнений?
14. Как связана система дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциальное уравнений высшего порядка?
15. В чем суть численных методов решения ДУ?
16. Что такое переходный процесс электрической цепи?
17. Могут ли переходные процессы в электрической схеме протекать мгновенно? Почему?
18. Как влияют реактивные элементы схемы на дляительность переходного процесса?

8.3. Лабораторная работа № 6. Переходный процесс в электрической схеме

Продолжительность – 4 часа.

Цель работы

Применение математических знаний в части решения ОДУ и систем ОДУ на примере исследования переходного процесса электрической цепи. Осмысление принципов изменения тока и напряжения в реактивных элементах схемы. Физическое осмысление понятий теории дифференциальных уравнений: ОДУ, начальные условия, производные электрических величин – как скорость изменения электромагнитных параметров сигнала.

Задание на лабораторную работу

1. Рассчитать переходный процесс в схеме (в соответствии с индивидуальным заданием *Таблица 10*), составив и решив систему дифференциальных уравнений относительно вектора неизвестных $x(t) = [i_L(t),\ u_C(t)]^T$ с начальными условиями $x(0) = [0,\ 0]^T$. Построить график переходного процесса в цепи постоянного тока.

2. Рассчитать энергию магнитного поля, накапливаемую в катушке индуктивности и энергию электрического поля – в конденсаторе.

3. Заменив источник постоянного напряжения на источник переменной ЭДС (в соответствии с индивидуальным заданием *Таблица 2*), построить график переходного процесса в цепи постоянного тока с гармоническим сигналом на входе при тех же нулевых начальных условиях.

4. Пользуясь методом, изученным в § *Лабораторная работа № 5. Расчет цепи переменного тока*, решить задачу по поиску установившихся токов и напряжений в цепи. Сравнить полученный результат с графиком переходного процесса, построенного в предыдущем пункте. Сделать выводы.

5. Составить отчет о проделанной работе, в котором отразить процесс построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вывод матрицы $D(t,x)$, привести программу на *MathCAD*, и результаты вычислений как для цепи с постоянным напряжением источника, так и для гармонического входного напряжения. Привести графики переходных процессов, привести графики установившихся $i_L(t)$ и $u_C(t)$, привести результаты проверки правильности построенных токов и напряжений в соответствии с § *Лабораторная работа № 5. Расчет цепи переменного тока*, сделать выводы.

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 2. Входное напряжение синусоидальной формы

№	*E(t)*	№	*E(t)*
1.	$E(t) = 10 \cdot \sin(1000 \cdot t + \pi/3)\ B$	8.	$E(t) = 150 \cdot \sin(1000 \cdot t + 3\pi/7)\ B$
2.	$E(t) = 100 \cdot \sin(2000 \cdot t + \pi/4)\ B$	9.	$E(t) = 24 \cdot \sin(3000 \cdot t + \pi/3)\ B$
3.	$E(t) = 200 \cdot \sin(3500 \cdot t + \pi/6)\ B$	10.	$E(t) = 500 \cdot \sin(2000 \cdot t + \pi)\ B$
4.	$E(t) = 110 \cdot \sin(100 \cdot t + \pi/2)\ B$	11.	$E(t) = 200 \cdot \sin(2000 \cdot t + 2\pi/3)\ B$
5.	$E(t) = 220 \cdot \sin(50 \cdot t + \pi/3)\ B$	12.	$E(t) = 100 \cdot \sin(100 \cdot t + \pi/5)\ B$
6.	$E(t) = 100 \cdot \sin(1000 \cdot t + \pi/2)\ B$	13.	$E(t) = 50 \cdot \sin(3000 \cdot t + \pi/4)\ B$
7.	$E(t) = 60 \cdot \sin(1000 \cdot t + 3\pi/4)\ B$	14.	$E(t) = 100 \cdot \sin(2000 \cdot t + 3\pi/4)\ B$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный курс «***Профессиональные математические пакеты***» является вводным с точки зрения исследования возможностей *CAE*-систем профессиональной математики. В него не вошли разделы, посвященные численным методам аппроксимации, решения дифференциальных уравнений, интегрирования и дифференцирования. Однако, навыки и компетенции, полученные студентом в данном курсе, позволят обучаемому уверенно выполнять расчетные работы из таких дисциплин как *«Высшая математика», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Физика», «Теоретические основы электротехники», «Теория автоматического управления» и «Методы анализа и расчета электронных схем».*

Курс преследует цели получения компетенций, позволяющих учащемуся делать стратегическую оценку решаемой математической задачи, основывающуюся на понимании и ясном представлении цели исследований и абстрагировании от шаблонов и алгоритмов поиска решений. Поиск конкретного числового решения обучаемый делегирует системе *MathCAD*.

Выполнение лабораторных и практических работ по данному курсу дает необходимый объем знаний, умений, навыков и компетенций, который может потребоваться студенту, обучающемуся по специальности «Электроника и наноэлектроника», в его учебной деятельности и научной работе.

Повысить свои навыки в части профессиональных математических пакетов студент сможет в курсах «Математическое моделирование и программирование» и «Прикладная информатика».

Руководство может быть использовано для проведения практических занятий и лабораторных работ как аудиторно, так и в режиме самоподготовки.

Руководство рекомендовано для организации самостоятельной работы студентов.

Наличие вариантов индивидуальных заданий позволяет использовать настоящее руководство для проведения контрольных работ и итогового тестирования.

Для освоения дисциплины «*Профессиональные математические пакеты*» достаточно знаний, полученных студентом в школьных курсах математики, информатики и физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematica. Система компьютерной алгебры компании Wolfram Research. Официальный сайт компании Wolfram Research http://www.wolfram.com. Способ доступа: http://www.wolfram.com/mathematica/.
2. Maple. Программный пакет компьютерной алгебры компании Waterloo Maple Inc. Официальный сайт: http://www.maplesoft.com/. Способ доступа: http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx.
3. MatLab. Пакет математических и инженерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика MathWorks http://www.mathworks.com/. Способ доступа: http://www.mathworks.com/products/matlab/.
4. MathCAD. Система компьютерных вычислений. Официальный сайт компании-разработчика Mathsoft http://www.mathsoft.com/, в составе PTC Community http://communities.ptc.com. Способ доступа: http://www.mathcad.com/, http://communities.ptc.com/community/mathcad
5. Михальченко, Сергей Геннадьевич. Профессиональные математические пакеты [Электронный ресурс] : Учебное пособие / С. Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2013. – on-line, 78 с. Способ доступа: http://ie.tusur.ru/content.php?id=444
6. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. — М.: «ДМК Пресс», 2009. — С. 624. — ISBN 978-5-94074-553-2
7. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. Изд-е второе дополненное и переработанное. — М.: «СОЛОН-Пресс», 2008. — С. 744. — ISBN 978-5-91359-045-9
8. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. — М.: Мир, 1997. — С. 208. — ISBN 5-03-003255-X
9. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: СОЛОН Пресс, 2006. — С. 720. — ISBN 5-98003-258-4
10. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. — М.: Диалектика, 2003. — С. 352. — ISBN 5-8459-0452-8
11. Матросов А. В. Maple 6: Решение задач высшей математики и механики: Практическое руководство. 2001 г. 528 с. ISBN 5-94157-021-X
12. Дьяконов В. П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. Изд-е 2-е, переработанное и дополненное. Библиотека профессионала. — Москва.: «СОЛОН-Пресс», 2008. — С. 800. — ISBN 978-5-91359-042-8
13. Дьяконов В. П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. — Москва.: «ДМК-Пресс», 2011. — С. 976. — ISBN 978-5-94074-492-4
14. Курбатова Екатерина Анатольевна. MATLAB 7. Самоучитель. — М.: «Диалектика», 2005. — С. 256. — ISBN 5-8459-0904-X
15. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MATLAB = Numerical Methods: Using MATLAB. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2001. — С. 720. — ISBN 0-13-270042-5
16. В.Ф. Очков. MathCAD 14 для студентов и инженеров. СПб.: BHV, 2009.
17. А. Васильев. MathCAD 13 на примерах (+ CD-ROM). С-Пб: БХВ-Петербург, 2006, 512с. ISBN: 5-94157-880-6.

18. Д. В. Кирьянов. MathCAD 12. Наиболее полное руководство (+ CD-ROM). С-Пб: БХВ-Петербург, 2005, 566 с. ISBN: 5-94157-407-X.

19. Дьяконов В. MathCAD 2001: Учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.

20. А. Черняк, Ж. Черняк, Ю. Доманова. Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс С-Пб.:БХВ-Петербург, 2004.

21. В.А. Охорзин. Прикладная математика в системе MATHCAD Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009, 352с. ISBN: 978-5-8114-0814-6.

22. Р.Ивановский. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде MathCAD. М.: БХВ-Петербург, 2008, 528с. ISBN978-5-9775-0199-6.

23. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9. М: НТ Пресс, 2006, 496с. ISBN: 5-477-00208-5.

24. В. В. Фриск. MathCAD. Расчеты и моделирование цепей на ПК. Москва: Солон-Пресс, 2006. ISBN: 5-98003-242-8.

25. Д. В. Кирьянов, Е. Н. Кирьянова. Вычислительная физика (с курсом лекций на CD) +. М.: Полибук Мультимедиа, 2006.

26. О.Гольдберг. Переходные процессы в электрических машинах и аппаратах и вопросы их проектирования. М.: Высшая школа. 2001.

27. С.Поршнев. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD. Учебное пособие. М.: Горячая линия - Телеком, 2002.

28. М.Панько. Расчет и моделирование автоматических систем регулирования в среде MathCAD. Издательство МЭИ. 2001.

29. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB = Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007. — ISBN 978-5-8459-1166-7

30. Коновалов, Борис Игоревич. Теоретические основы электротехники. Часть 1 [Электронный ресурс] : Учебное методическое пособие / Б. И. Коновалов; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2006. – on-line, 75 с. Способ доступа: http://ie.tusur.ru/content.php?id=444

31. Коновалов, Борис Игоревич. Теоретические основы электротехники. Часть 1 [Электронный ресурс] : Учебное пособие / Б. И. Коновалов; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра промышленной электроники. – Электрон. текстовые дан. – Томск : [б. и.], 2006. – on-line, 145 с. Способ доступа: http://ie.tusur.ru/content.php?id=444

Приложение 1

***Лабораторная работа №1**. Программирование в MathCAD*

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 3

№	Цифровой сигнал		Вид модуляции	Аналоговый сигнал		
	S_{hex}	f_d		ω	U	φ
1.	B2B2	10 кГц	фазовая модуляция	50 Гц	220 В	0, 3π/4
2.	2AB2	20 кГц	амплитудная модуляция	3 кГц	5 В, 10 В	π/4
3.	2A5D	10 МГц	амплитудная модуляция	300 Гц	12 В, 2 В	π/3
4.	5DE3	1 МГц	фазовая модуляция	30 Гц	10 мВ	7π/8, 3π/8
5.	E3E9	100 кГц	амплитудная модуляция	100 Гц	25 мВ, 100 В	7π/12
6.	E9CD	120 кГц	частотная модуляция	40 Гц, 10 Гц	0.5 В	3π/4
7.	CDD1	30 кГц	частотная модуляция	10 Гц, 100 Гц	0.3 В	π/4
8.	D1E2	50 кГц	амплитудная модуляция	50 Гц	380 В, 100 В	π/3
9.	E2F8	30 МГц	фазовая модуляция	7 кГц	14 В	5π/8, π/8
10.	F83A	15 МГц	частотная модуляция	700 Гц, 70 Гц	110 В	3π/5
11.	3AD6	320 кГц	амплитудная модуляция	700 Гц	15 В, 120 В	π/4
12.	D65E	40 кГц	амплитудная модуляция	500 Гц	25 В, 100 В	π/3
13.	5EB4	60 кГц	фазовая модуляция	1700 Гц	100 мВ	4π/9, 2π/9
14.	B45C	60 МГц	фазовая модуляция	80 Гц	25 В	3π/7, 5π/7
15.	5C8D	4 МГц	частотная модуляция	1 кГц, 10 кГц	0.5 В	3π/4
16.	12A3	400 кГц	частотная модуляция	800 Гц, 80 Гц	0.1 В	π/4
17.	A39B	620 кГц	амплитудная модуляция	20 кГц	10 В, 80 В	π/3
18.	9BE3	20 кГц	фазовая модуляция	80 кГц	100 В	7π/12, π/12
19.	A06A	90 кГц	частотная модуляция	600 Гц, 60 Гц	210 В	9π/12

Приложение 2

Лабораторная работа №2. *Расчет силы Лоренца в электромагнитном поле*

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 4

№	***F*** [Н]	***B*** [Тл]	***E*** [В/м]	***v*** [м/с]	***q***
1.	?	$\begin{pmatrix} -7.1\cdot10^{8} \\ 9\cdot10^{8} \\ 8.2\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.4\cdot10^{11} \\ -3.1\cdot10^{12} \\ 7.1\cdot10^{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{3} \\ -1.1\cdot10^{3} \\ -1.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
2.	$\begin{pmatrix} -4.531\times10^{-6} \\ 1.368\times10^{-6} \\ -2.637\times10^{-6} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 9.9\cdot10^{12} \\ -3.3\cdot10^{12} \\ 7.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{3} \\ 3.1\cdot10^{3} \\ -2.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	электрон
3.	$\begin{pmatrix} 2.269\times10^{-7} \\ -3.656\times10^{-7} \\ 2.096\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.4\cdot10^{8} \\ 9.1\cdot10^{8} \\ -8.3\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 7.2\cdot10^{3} \\ -8.1\cdot10^{3} \\ 6.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
4.	$\begin{pmatrix} -1.461\times10^{-6} \\ -5.479\times10^{-7} \\ 5.736\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.7\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 2.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{12} \\ 3.3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	?	электрон
5.	?	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{9} \\ 3\cdot10^{9} \\ 5.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 3.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.8\cdot10^{2} \\ 10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	протон
6.	$\begin{pmatrix} 8.395\times10^{-7} \\ -1.512\times10^{-6} \\ -1.106\times10^{-6} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ -10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон
7.	$\begin{pmatrix} 2.192\times10^{-7} \\ -4.609\times10^{-7} \\ 1.617\times10^{-7} \end{pmatrix}$	?	0	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{3} \\ -1.1\cdot10^{3} \\ -1.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
8.	$\begin{pmatrix} -4.531\times10^{-6} \\ 1.368\times10^{-6} \\ -2.637\times10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.4\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 4.1\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{3} \\ 3.1\cdot10^{3} \\ -2.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	электрон
9.	$\begin{pmatrix} 2.269\times10^{-7} \\ -3.656\times10^{-7} \\ 2.096\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.4\cdot10^{8} \\ 9.1\cdot10^{8} \\ -8.3\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.9\cdot10^{11} \\ -3.3\cdot10^{12} \\ 7.5\cdot10^{11} \end{pmatrix}$	?	протон

№	**F** [Н]	**B** [Тл]	**E** [В/м]	**v** [м/с]	**q**
10.	?	$\begin{pmatrix} 1.7\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 2.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{12} \\ 3.3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ 2\cdot10^{3} \\ -12\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон
11.	$\begin{pmatrix} 1.176\times10^{-6} \\ -3.72\times10^{-7} \\ 6.793\times10^{-7} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 3.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.8\cdot10^{2} \\ 10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	протон
12.	$\begin{pmatrix} 8.395\times10^{-7} \\ -1.512\times10^{-6} \\ -1.106\times10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7\cdot10^{9} \\ 2\cdot10^{9} \\ 7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ -10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон
13.	$\begin{pmatrix} 2.192\times10^{-7} \\ -4.609\times10^{-7} \\ 1.617\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.1\cdot10^{8} \\ 9\cdot10^{8} \\ 8.2\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{3} \\ -1.1\cdot10^{3} \\ -1.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
14.	$\begin{pmatrix} -4.531\times10^{-6} \\ 1.368\times10^{-6} \\ -2.637\times10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.4\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 4.1\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.9\cdot10^{12} \\ -3.3\cdot10^{12} \\ 7.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	?	электрон
15.	?	$\begin{pmatrix} -7.4\cdot10^{8} \\ 9.1\cdot10^{8} \\ -8.3\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 7.2\cdot10^{3} \\ -8.1\cdot10^{3} \\ 6.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
16.	$\begin{pmatrix} -1.461\times10^{-6} \\ -5.479\times10^{-7} \\ 5.736\times10^{-7} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 1.2\cdot10^{12} \\ 3.3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ 2\cdot10^{3} \\ -12\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон
17.	$\begin{pmatrix} 1.176\times10^{-6} \\ -3.72\times10^{-7} \\ 6.793\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{9} \\ 3\cdot10^{9} \\ 5.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 9.8\cdot10^{2} \\ 10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	протон
18.	$\begin{pmatrix} 8.395\times10^{-7} \\ -1.512\times10^{-6} \\ -1.106\times10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7\cdot10^{9} \\ 2\cdot10^{9} \\ 7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	?	электрон
19.	$\begin{pmatrix} 2.192\times10^{-7} \\ -4.609\times10^{-7} \\ 1.617\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.1\cdot10^{8} \\ 9\cdot10^{8} \\ 8.2\cdot10^{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.4\cdot10^{11} \\ -3.1\cdot10^{12} \\ 7.1\cdot10^{11} \end{pmatrix}$	?	протон

№	***F*** [Н]	***B*** [Тл]	***E*** [В/м]	***v*** [м/с]	***q***
20.	?	$\begin{pmatrix} -1.4\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 4.1\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{3} \\ 3.1\cdot10^{3} \\ -2.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	электрон
21.	$\begin{pmatrix} 2.269\times10^{-7} \\ -3.656\times10^{-7} \\ 2.096\times10^{-7} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} 7.9\cdot10^{11} \\ -3.3\cdot10^{12} \\ 7.5\cdot10^{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.2\cdot10^{3} \\ -8.1\cdot10^{3} \\ 6.7\cdot10^{3} \end{pmatrix}$	протон
22.	$\begin{pmatrix} -1.461\times10^{-6} \\ -5.479\times10^{-7} \\ 5.736\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.7\cdot10^{9} \\ 2.1\cdot10^{9} \\ 2.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ 2\cdot10^{3} \\ -12\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон
23.	$\begin{pmatrix} 1.176\times10^{-6} \\ -3.72\times10^{-7} \\ 6.793\times10^{-7} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2\cdot10^{9} \\ 3\cdot10^{9} \\ 5.7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 3.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	?	протон
24.	?	$\begin{pmatrix} 7\cdot10^{9} \\ 2\cdot10^{9} \\ 7\cdot10^{9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\cdot10^{12} \\ 3\cdot10^{12} \\ 1.5\cdot10^{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8\cdot10^{2} \\ -10^{3} \\ 1.2\cdot10^{2} \end{pmatrix}$	электрон

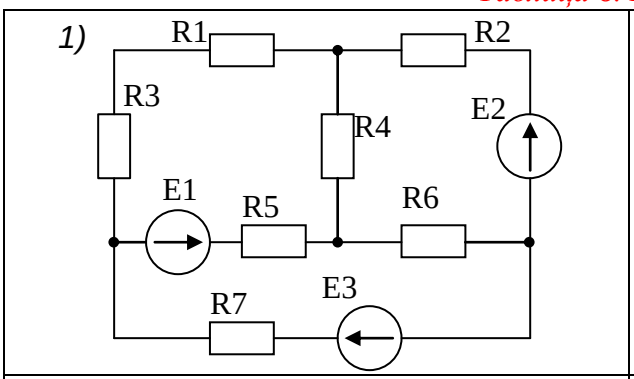
Приложение 3

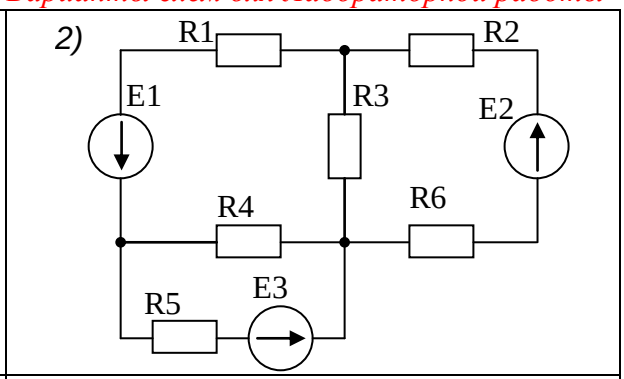
Лабораторная работа №3. Расчет цепи постоянного тока
Варианты индивидуальных заданий.

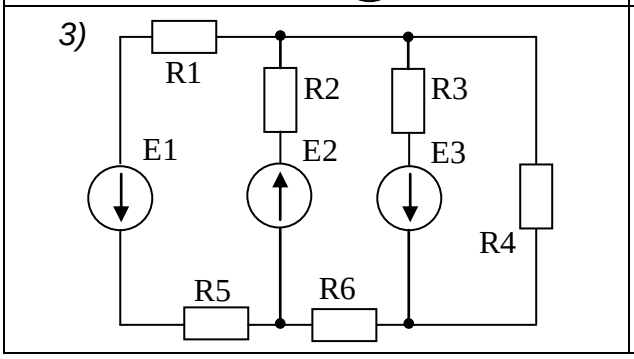
Таблица 5. Параметры элементов схемы

№	Номиналы элементов
1.	E1= 120 *В*, E2= 60 *В*, E3= 40 *В*, E4= 100 *В*; R1= 60 *Ом*, R2= 30 *Ом*, R3= 20 *Ом*, R4= 15 *Ом*, R5= 25 *Ом*, R6= 10 *Ом*, R7= 20 *Ом*.
2.	E1= 12 *В*, E2= 14 *В*, E3= 5 *В*, E4= 10 *В*; R1= 0.6 *Ом*, R2= 3 *Ом*, R3= 0.5 *Ом*, R4= 1.5 *Ом*, R5= 2.5 *Ом*, R6= 10 *Ом*, R7= 2 *Ом*.
3.	E1= 12 *В*, E2= 6 *В*, E3= 10 *В*, E4= 10 *В*; R1= 6 *Ом*, R2= 3 *Ом*, R3= 2 *Ом*, R4= 15 *Ом*, R5= 25 *Ом*, R6= 5 *Ом*, R7= 1 *Ом*.
4.	E1= 140 *В*, E2= 70 *В*, E3= 35 *В*, E4= 210 *В*; R1= 70 *Ом*, R2= 35 *Ом*, R3= 70 *Ом*, R4= 35 *Ом*, R5= 25 *Ом*, R6= 10 *Ом*, R7= 35 *Ом*.
5.	E1= 160 *В*, E2= 80 *В*, E3= 240 *В*, E4= 10 *В*; R1= 600 *Ом*, R2= 3 *кОм*, R3= 2 *кОм*, R4= 150 *Ом*, R5= 25 *Ом*, R6= 1 *кОм*, R7= 400 *Ом*.
6.	E1= 14 *В*, E2= 7 *В*, E3= 70 *В*, E4= 70 *В*; R1= 6 *Ом*, R2= 3.5 *Ом*, R3= 2 *Ом*, R4= 2.5 *Ом*, R5= 2.5 *Ом*, R6= 10 *Ом*, R7= 2.5 *Ом*.
7.	E1= 12.5 *В*, E2= 6.3 *В*, E3= 4.0 *В*, E4= 10.5 *В*; R1= 6.0 *Ом*, R2= 3.3 *Ом*, R3= 20.5 *Ом*, R4= 1.5 *кОм*, R5= 2 *кОм*, R6= 1 *Ом*, R7= 5 *Ом*.
8.	E1= 110 *В*, E2= 50 *В*, E3= 60 *В*, E4= 100 *В*; R1= 5 *Ом*, R2= 300 *Ом*, R3= 20 *Ом*, R4= 150 *Ом*, R5= 2.5 *Ом*, R6= 200 *Ом*, R7= 2 *Ом*.
9.	E1= 12.5 *В*, E2= 6.5 *В*, E3= 42 *В*, E4= 110 *В*; R1= 60 *Ом*, R2= 3 *Ом*, R3= 2 *кОм*, R4= 1.5 *Ом*, R5= 205 *Ом*, R6= 100 *Ом*, R7= 30 *Ом*.
10.	E1= 10 *В*, E2= 6 *В*, E3= 5 *В*, E4= 10 *В*; R1= 5 *Ом*, R2= 1.3 *Ом*, R3= 1.2 *Ом*, R4= 1.5 *Ом*, R5= 2.5 *Ом*, R6= 10 *Ом*, R7= 2.5 *Ом*.
11.	E1= 50 *В*, E2= 60 *В*, E3= 40 *В*, E4= 30 *В*; R1= 7.3 *Ом*, R2= 3.5 *Ом*, R3= 2.4 *Ом*, R4= 1.5 *Ом*, R5= 2.25 *Ом*, R6= 2 *Ом*, R7= 2 *Ом*.
12.	E1= 10 *В*, E2= 0.6 *В*, E3= 5 *В*, E4= 3.3 *В*; R1= 7 *Ом*, R2= 70 *Ом*, R3= 20 *Ом*, R4= 1.5 *Ом*, R5= 12 *Ом*, R6= 17 *Ом*, R7= 10 *Ом*.

Таблица 6. Варианты схем для Лабораторной работы







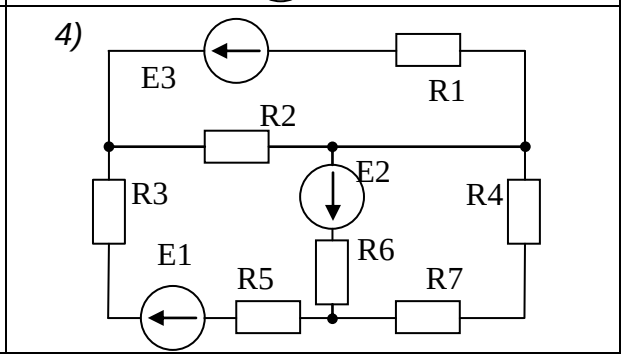


Таблица 6. Варианты схем для Лабораторной работы

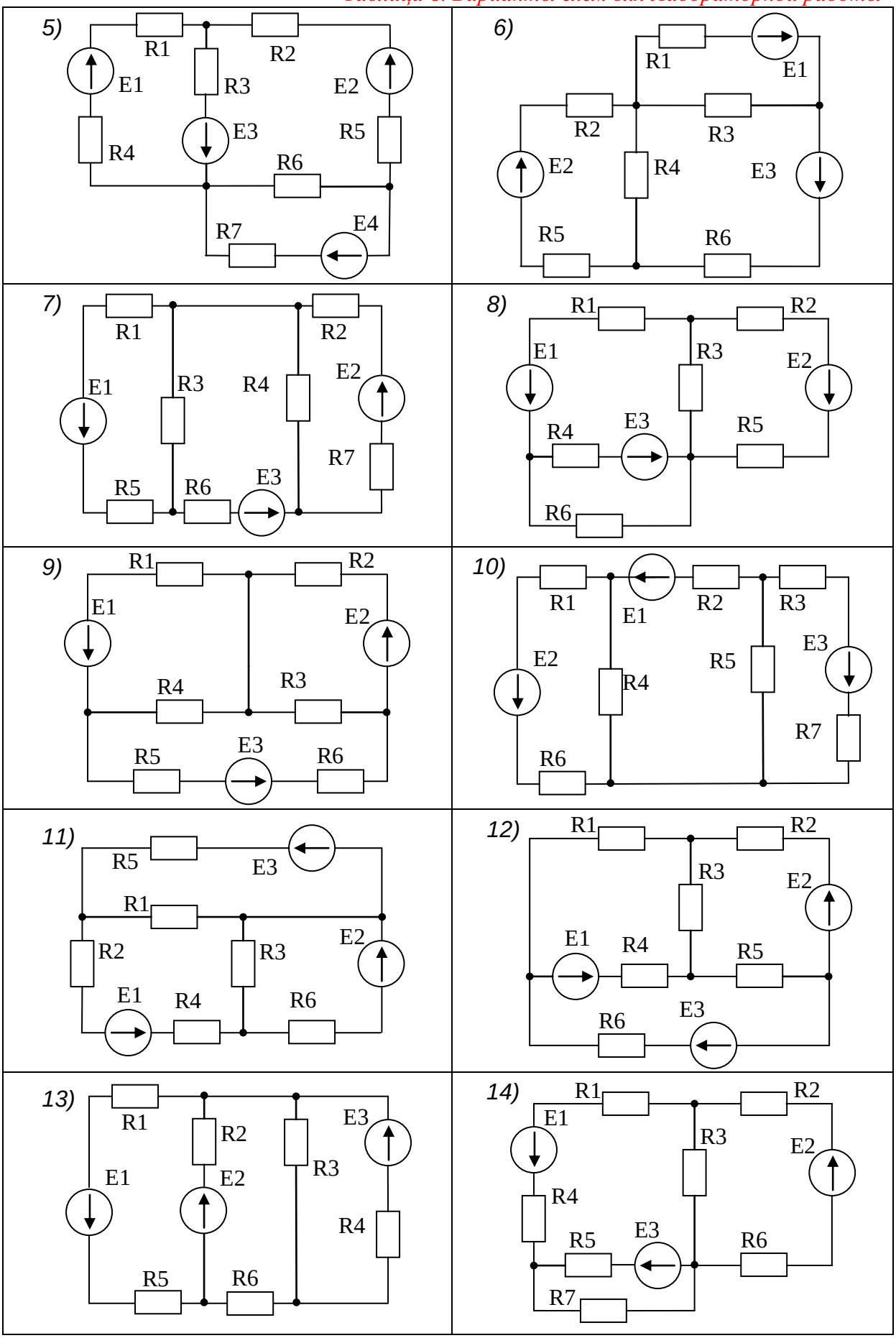
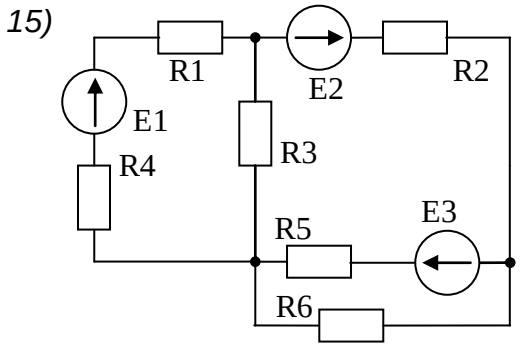
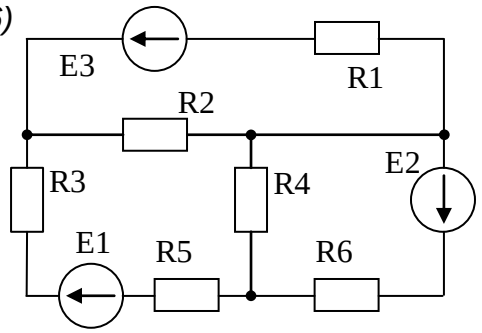


Таблица 6. Варианты схем для Лабораторной работы

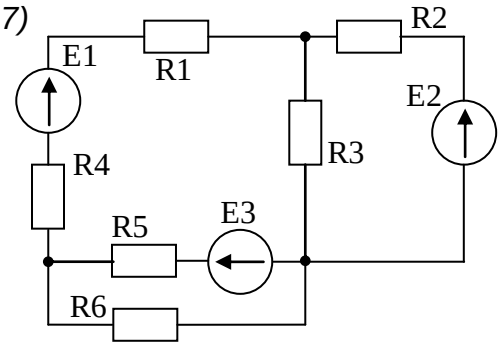
15)



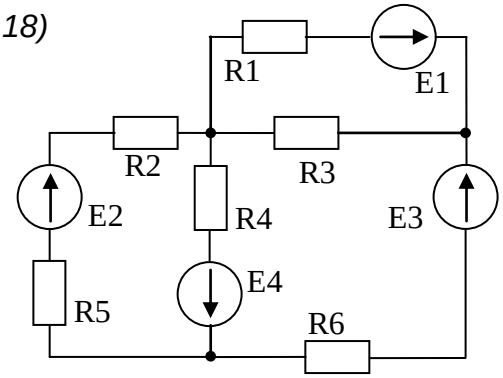
16)



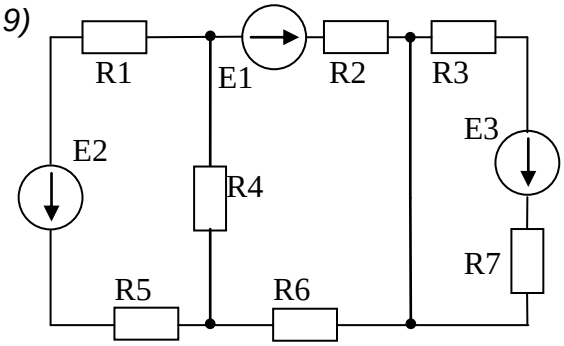
17)



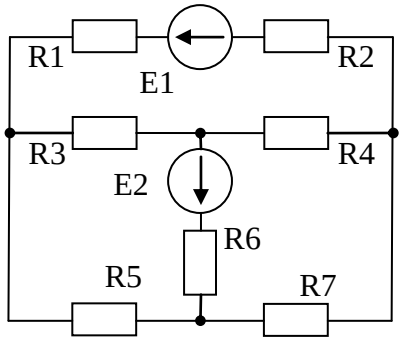
18)



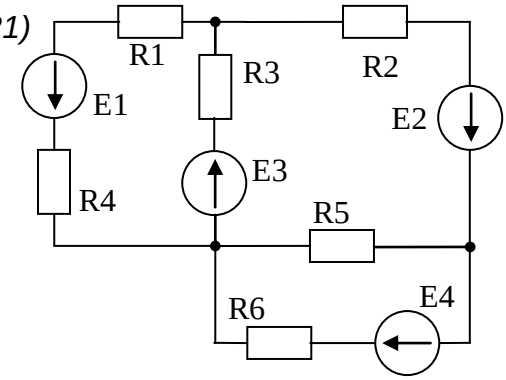
19)



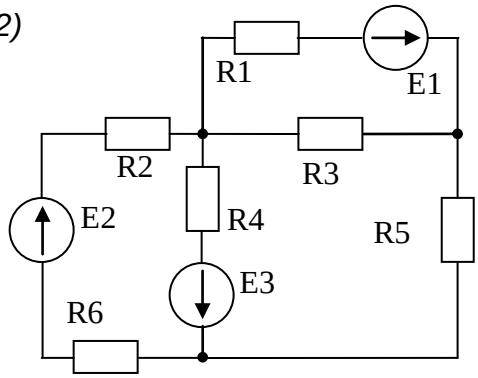
20)



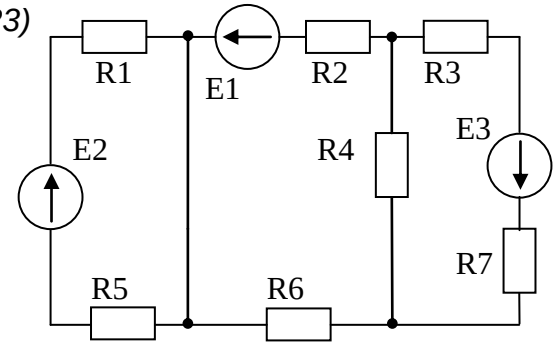
21)



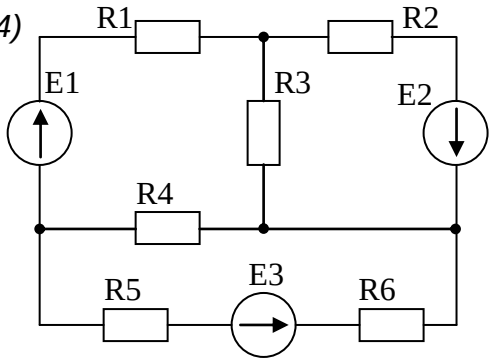
22)



23)



24)



Приложение 4

Лабораторная работа №4. Комплексные вычисления
Варианты индивидуальных заданий.

Таблица 7

№	$A \subset \square$	$w = \psi(z)$
1.	$z_k = \frac{2}{k} - i \cdot 3k,\ \ k = 1..10$	$\frac{3 \cdot z + i}{2i \cdot z + 3}$
2.	$z_k = 3 \cdot e^{2ik},\ \ k = 1..10$	$3iz + 4z + 1 - i$
3.	$\lvert z_k \rvert = 2k,\ \ \arg(z_k) = \pi/3,\ k = 1..10$	$2i \cdot \sin(z)$
4.	Луч $\arg(z) = 4\pi/3,\ \ \lvert z \rvert \geq 0$	$\mathrm{tg}(3iz + 4z)$
5.	$\mathrm{Re}(z_k) = k,\ \ \mathrm{Im}(z_k) = 1,\ k = -10..10$	e^{2z-2i}
6.	Прямая $\mathrm{Re}(z) = 3$	$\ln(iz)$
7.	$z_k = 3\cos(\pi k/7) - 3i\sin(\pi k/7),\ k = 1..6$	$z^3 + 2i$
8.	Окружность $\lvert z \rvert = 3$	$3i \cdot \cos(z)$
9.	$z_k = 0.5k - i \cdot 3,\ \ k = 2..12$	e^{-3iz}
10.	$z_k = 4k \cdot e^{-3i},\ \ k = 1..5$	$\mathrm{ctg}((3i + 3)z)$
11.	$\lvert z_k \rvert = 5,\ \ \arg(z_k) = \pi k/3,\ k = 1..10$	$\frac{3 + 3i}{3 \cdot z + 3}$
12.	$z_k = 3k\cos(\pi/5) - 3ki\sin(\pi/5),\ k = 1..6$	$(2i + 1) \cdot \sin(z)$
13.	$\mathrm{Re}(z_k) = 1,\ \ \mathrm{Im}(z_k) = 0.2k,\ k = -5..5$	$3z^{3i} + 3i$
14.	Прямая $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$	$2i \cdot \ln(z)$
15.	Парабола $\mathrm{Re}(z) = (\mathrm{Im}(z)^2 - 1)/2$	$z^{-i} + z^{i}$
16.	$\lvert z_k \rvert = k,\ \ \arg(z_k) = \pi k/4,\ k = 1..10$	$2i \cdot e^{-2z}$
17.	Окружность $\lvert z - 2 \rvert = \lvert 1 - 2\bar{z} \rvert$	$\mathrm{th}(z + 4)$
18.	$z_k = 0.1k \cdot e^{0.1ik},\ \ k = 1..10$	$-2i \cdot \cos(z)$
19.	Гипербола $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z) = -1$	$2z - 2iz + 1 + i$
20.	$z_k = 2k\left(\cos(\pi k/4) - i\sin(\pi k/4)\right),\ k = 1..8$	$\frac{3i \cdot z + 3}{2i \cdot z + 2}$
21.	$\mathrm{Re}(z_k) = 5 - k,\ \ \mathrm{Im}(z_k) = 2k,\ k = 0..5$	$\lvert e^{z} \rvert \cdot \sin(iz)$
22.	Парабола $\lvert z \rvert = \mathrm{Re}(1 + z)$	$2i \cdot \mathrm{sh}(z) - 2i \cdot \mathrm{ch}(z)$
23.	$z_k = 10 - i \cdot 5k,\ \ k = 2..8$	$\mathrm{cth}(3iz)$
24.	Круг $\lvert z \rvert \leq 5$	$\sin(2z) + \sin(-2iz)$
25.	$z_k = 1.2 \cdot k \cdot e^{1.2 \cdot k \cdot i},\ \ k \in \square$	$3z + iz - i$

Приложение 5

Лабораторная работа № 5. Расчет цепи переменного тока
Варианты индивидуальных заданий.

Таблица 8. Параметры элементов схемы

№	Номиналы элементов
1.	E1 = 20 В, R1 = 10 Ом, R2 = 3 Ом, R3 = 20 Ом, R4 = 0.9 Ом, R5 = 0.1 Ом, L1 = 0.025 Гн, C1 = 0.1 Ф, C2 = 0.002 Ф, ω = 628 рад/с
2.	E1 = 10 В, R1 = 1 Ом, R2 = 0.3 Ом, R3 = 0.2 Ом, R4 = 90 Ом, R5 = 1 Ом, L1 = 0.0125 Гн, C1 = 0.01 Ф, C2 = 0.02 Ф, ω = 3.14 рад/с
3.	E1 = 5 В, R1 = 100 Ом, R2 = 40 Ом, R3 = 2 Ом, R4 = 900 Ом, R5 = 10 Ом, L1 = 0.002 Гн, L2 = 0.01 Гн, C1 = 0.2 Ф, ω = 6.28 рад/с
4.	E1 = 15 В, R1 = 20 Ом, R2 = 4 Ом, R3 = 200 Ом, R4 = 9 Ом, R5 = 100 Ом, L1 = 0.2 Гн, L2 = 0.001 Гн, C1 = 0.1 Ф, ω = 618 рад/с
5.	E1 = 12 В, R1 = 2 Ом, R2 = 0.4 Ом, R3 = 100 Ом, R4 = 0.8 Ом, R5 = 20 Ом, L1 = 0.02 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.002 Ф, ω = 3142 рад/с
6.	E1 = 110 В, R1 = 200 Ом, R2 = 50 Ом, R3 = 10 Ом, R4 = 800 Ом, R5 = 200 Ом, L1 = 0.035 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.002 Ф, ω = 6280 рад/с
7.	E1 = 36 В, R1 = 30 Ом, R2 = 0.5 Ом, R3 = 0.1 Ом, R4 = 80 Ом, R5 = 30 Ом, L1 = 0.2 Гн, C1 = 0.1 Ф, C2 = 0.2 Ф, ω = 31.4 рад/с
8.	E1 = 220 В, R1 = 3 Ом, R2 = 10 Ом, R3 = 100 Ом, R4 = 8 Ом, R5 = 300 Ом, L1 = 0.2 Гн, L2 = 0.01 Гн, C1 = 0.01 Ф, ω = 62.8 рад/с
9.	E1 = 120 В, R1 = 300 Ом, R2 = 0.6 Ом, R3 = 2 Ом, R4 = 0.7 Ом, R5 = 50 Ом, L1 = 0.09 Гн, L2 = 0.018 Гн, C1 = 0.05 Ф, ω = 6180 рад/с
10.	E1 = 100 В, R1 = 40 Ом, R2 = 0.7 Ом, R3 = 200 Ом, R4 = 7 Ом, R5 = 500 Ом, L1 = 0.006 Гн, L2 = 0.016 Гн, C1 = 0.015 Ф, ω = 3140 рад/с
11.	E1 = 24 В, R1 = 4 Ом, R2 = 0.8 Ом, R3 = 20 Ом, R4 = 70 Ом, R5 = 0.5 Ом, L1 = 0.05 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.02 Ф, ω = 31.4 рад/с
12.	E1 = 12 В, R1 = 400 Ом, R2 = 0.9 Ом, R3 = 0.2 Ом, R4 = 700 Ом, R5 = 60 Ом, L1 = 0.4 Гн, C1 = 0.01 Ф, C2 = 0.02 Ф, ω = 314 рад/с
13.	E1 = 15 В, R1 = 50 Ом, R2 = 900 Ом, R3 = 3 Ом, R4 = 0.6 Ом, R5 = 600 Ом, L1 = 0.003 Гн, L2 = 0.03 Гн, C1 = 0.07 Ф, ω = 628 рад/с
14.	E1 = 6 В, R1 = 5 Ом, R2 = 90 Ом, R3 = 300 Ом, R4 = 6 Ом, R5 = 0.15 Ом, L1 = 0.002 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.003 Ф, ω = 31.4 рад/с
15.	E1 = 9 В, R1 = 500 Ом, R2 = 9 Ом, R3 = 30 Ом, R4 = 60 Ом, R5 = 25 Ом, L1 = 0.12 Гн, C1 = 0.05 Ф, C2 = 0.025 Ф, ω = 3140 рад/с
16.	E1 = 220 В, R1 = 60 Ом, R2 = 800 Ом, R3 = 0.3 Ом, R4 = 600 Ом, R5 = 0.25 Ом, L1 = 0.5 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.002 Ф, ω = 314 рад/с
17.	E1 = 110 В, R1 = 6 Ом, R2 = 80 Ом, R3 = 400 Ом, R4 = 0.5 Ом, R5 = 2.5 Ом, L1 = 0.25 Гн, L2 = 0.125 Гн, C1 = 0.004 Ф, ω = 6280 рад/с
18.	E1 = 20 В, R1 = 600 Ом, R2 = 8 Ом, R3 = 40 Ом, R4 = 5 Ом, R5 = 0.5 Ом, L1 = 0.0125 Гн, L2 = 0.001 Гн, C1 = 0.0016 Ф, ω = 62.8 рад/с
19.	E1 = 100 В, R1 = 70 Ом, R2 = 700 Ом, R3 = 4 Ом, R4 = 500 Ом, R5 = 0.55 Ом, L1 = 0.02 Гн, C1 = 0.005 Ф, C2 = 0.002 Ф, ω = 314 рад/с
20.	E1 = 60 В, R1 = 7 Ом, R2 = 1 Ом, R3 = 0.4 Ом, R4 = 50 Ом, L1 = 0.2 Гн, C1 = 0.001 Ф, C2 = 0.003 Ф, ω = 628 рад/с

Таблица 9. Варианты схем для Лабораторной работы

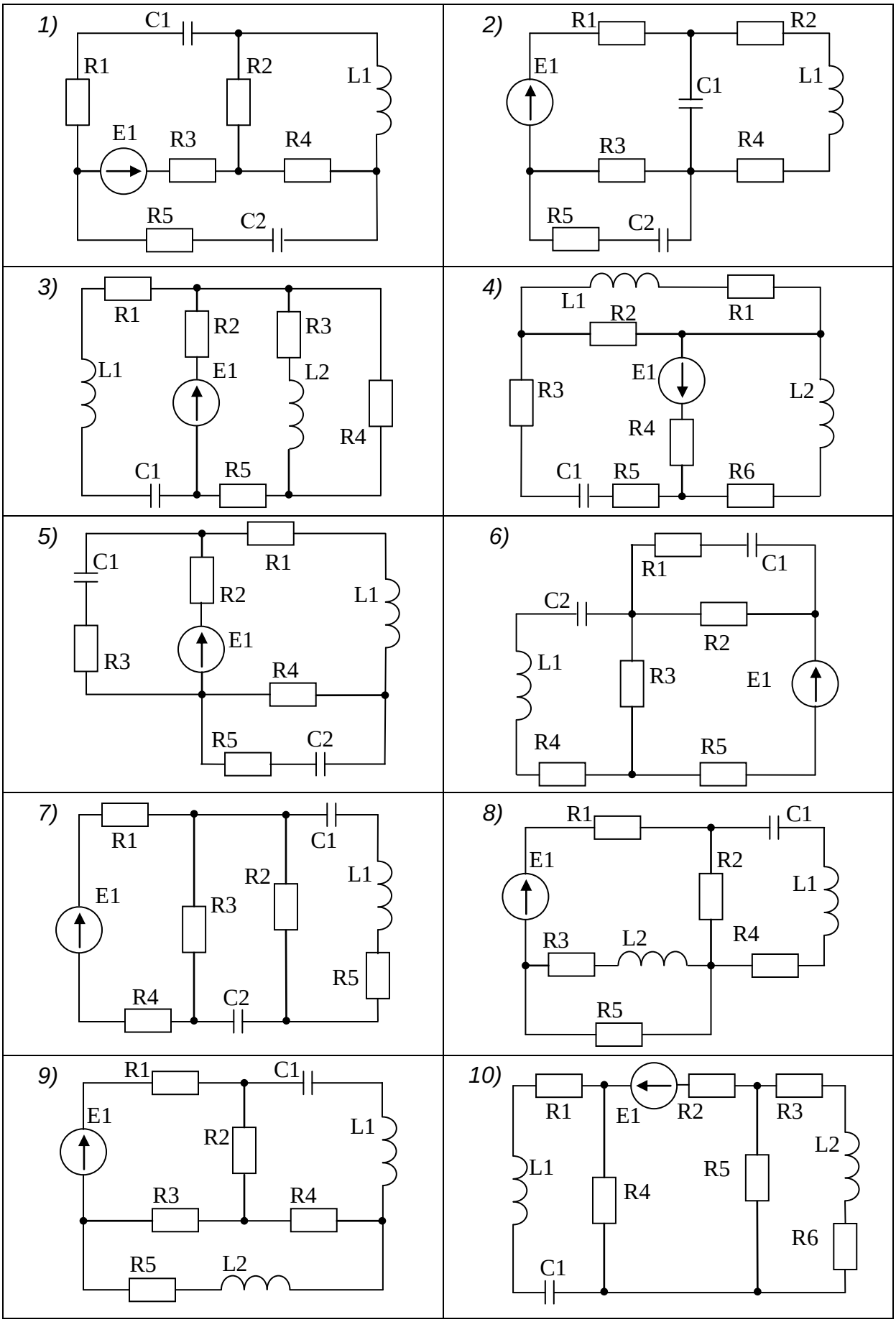
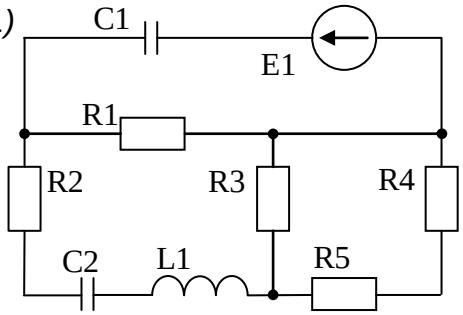
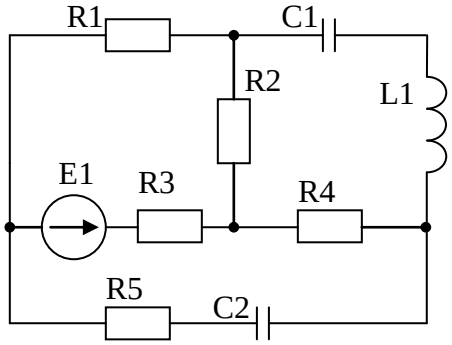
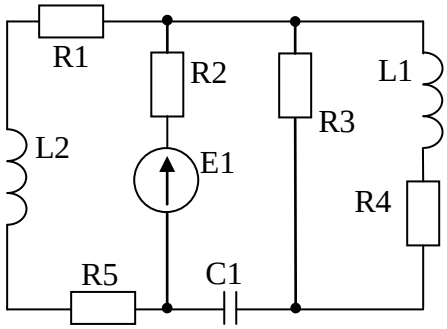
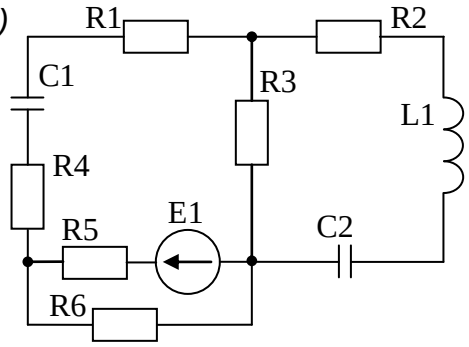
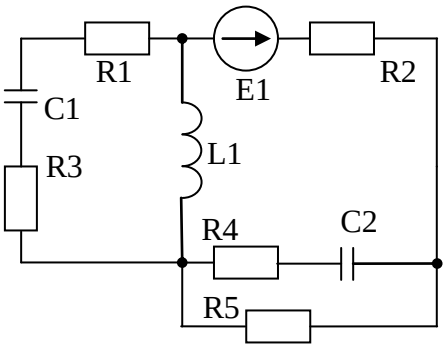
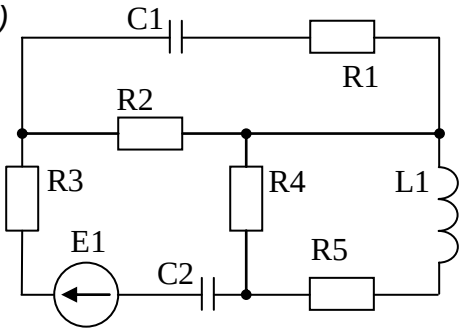
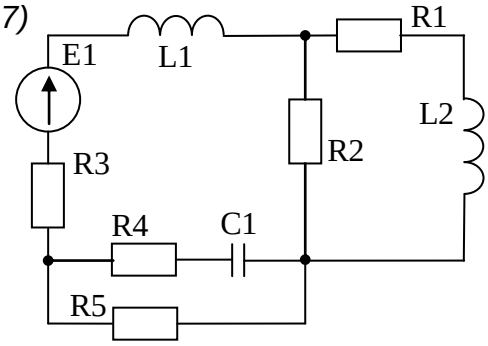
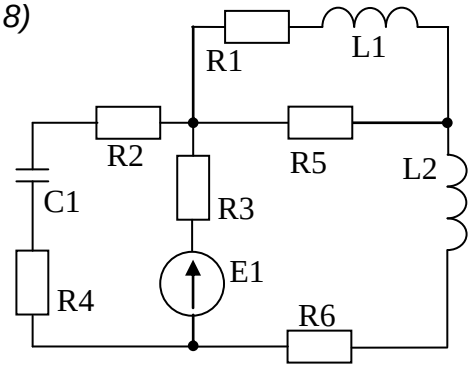
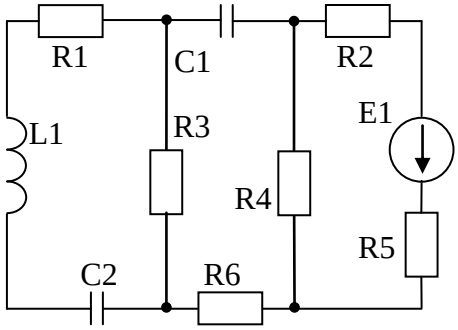
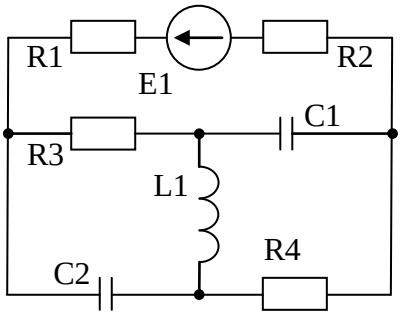
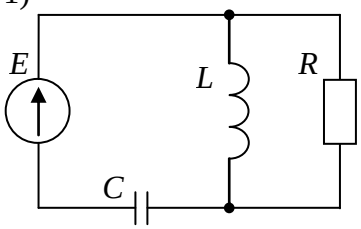
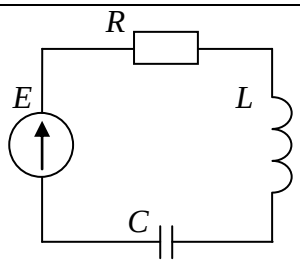
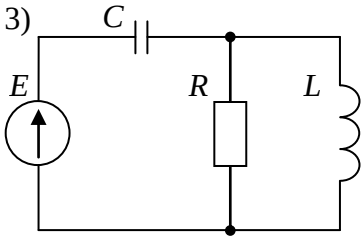
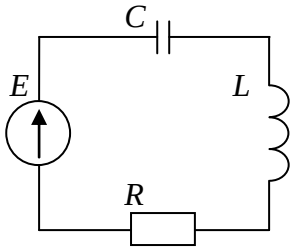
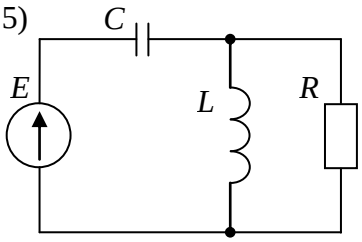
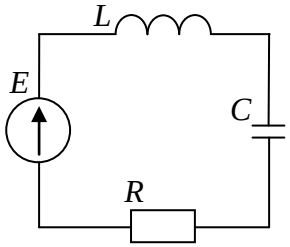
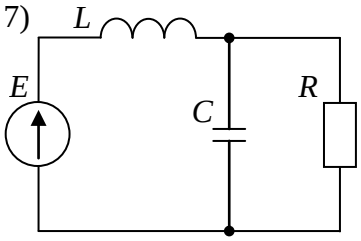
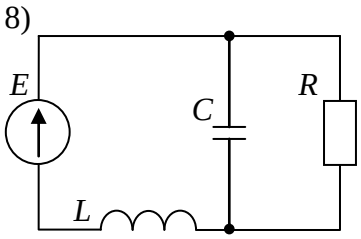
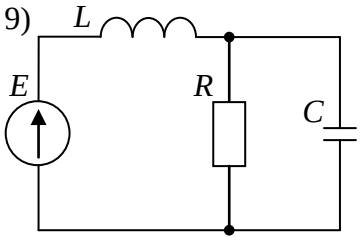
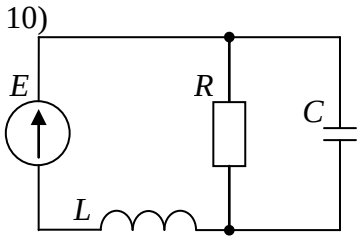
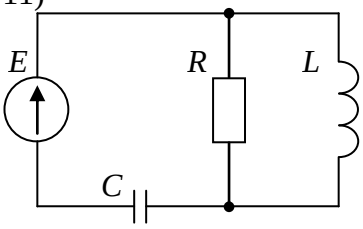
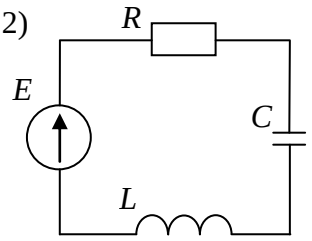


Таблица 9. Варианты схем для Лабораторной работы

11) 	12) 
13) 	14) 
15) 	16) 
17) 	18) 
19) 	20) 

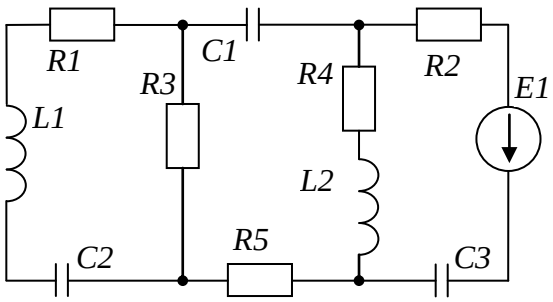
Лабораторная работа № 6.

Таблица 10. Варианты схем к Лабораторной работе

1) 	$L = 0.01$ *Гн* $C = 10^{-6}$ *Ф* $R = 100$ *Ом* $E = 100$ *В*	2) 	$L = 0.02$ *Гн* $C = 10^{-5}$ *Ф* $R = 200$ *Ом* $E = 250$ *В*
3) 	$L = 0.005$ *Гн* $C = 10^{-7}$ *Ф* $R = 100$ *Ом* $E = 120$ *В*	4) 	$L = 0.05$ *Гн* $C = 10^{-7}$ *Ф* $R = 10$ *Ом* $E = 100$ *В*
5) 	$L = 0.01$ *Гн* $C = 10^{-5}$ *Ф* $R = 100$ *Ом* $E = 50$ *В*	6) 	$L = 0.01$ *Гн* $C = 10^{-7}$ *Ф* $R = 100$ *Ом* $E = 150$ *В*
7) 	$L = 0.005$ *Гн* $C = 10^{-5}$ *Ф* $R = 50$ *Ом* $E = 500$ *В*	8) 	$L = 0.003$ *Гн* $C = 10^{-7}$ *Ф* $R = 10$ *Ом* $E = 20$ *В*
9) 	$L = 0.03$ *Гн* $C = 10^{-5}$ *Ф* $R = 500$ *Ом* $E = 200$ *В*	10) 	$L = 0.04$ *Гн* $C = 10^{-6}$ *Ф* $R = 100$ *Ом* $E = 250$ *В*
11) 	$L = 0.05$ *Гн* $C = 10^{-5}$ *Ф* $R = 500$ *Ом* $E = 50$ *В*	12) 	$L = 0.02$ *Гн* $C = 10^{-6}$ *Ф* $R = 200$ *Ом* $E = 200$ *В*

Приложение 7

РАСЧЕТ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. ПРИМЕР



E1=360 [В]	*ω= 314 [рад/с]*
R1= 30 [Ом]	*L1= 0,005 [Гн]*
R2= 50 [Ом]	*L2= 0,055 [Гн]*
R3= 10 [Ом]	*C1= 0,5 [Ф]*
R4= 80 [Ом]	*C2= 0,025 [Ф]*
R5= 30 [Ом]	*C3= 0,01 [Ф]*

Сопротивления реактивных элементов цепи равны:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \qquad X_L = \omega \cdot L \qquad [\text{Ом}] \qquad (34)\ (37)$$

Зададим параметры схемы

$E1 := 360$ [В] $\quad \omega := 3.14$ [рад/сек]

$R1 := 30$ [Ом] $\quad R2 := 50$ [Ом] $\quad R3 := 10$ [Ом] $\quad R4 := 80$ [Ом] $\quad R5 := 30$ [Ом]

$L1 := 0.005$ [Гн] $\quad L2 := 0.055$ [Гн]

$C1 := 0.5$ [Ф] $\quad C2 := 0.025$ [Ф] $\quad C3 := 0.01$ [Ф]

Вычислим сопротивления реактивных элементов

$XC1 := \frac{1}{\omega \cdot C1}$ $\quad XC1 = 0.637$ [Ом] $\quad XL1 := \omega \cdot L1$ $\quad XL1 = 0.016$ [Ом]

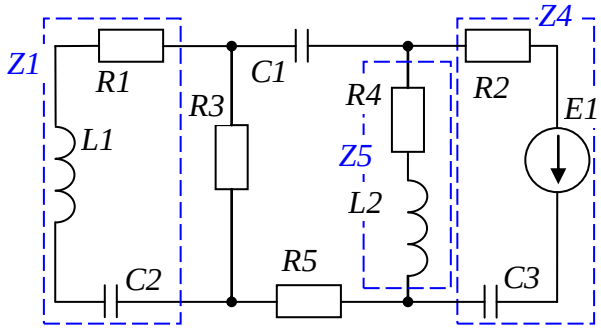
$XC2 := \frac{1}{\omega \cdot C2}$ $\quad XC2 = 12.739$ [Ом] $\quad XL2 := \omega \cdot L2$ $\quad XL2 = 0.173$ [Ом]

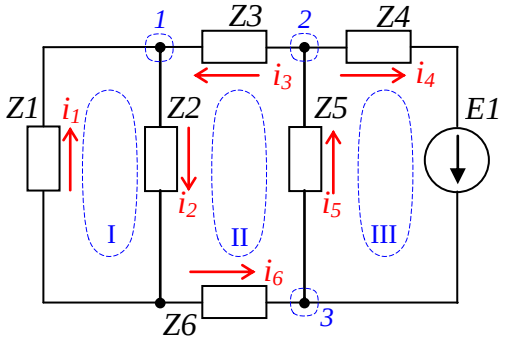
$XC3 := \frac{1}{\omega \cdot C3}$ $\quad XC3 = 31.847$ [Ом]

Комплексное сопротивление Z для участка цепи переменного тока (с частотой ω), обладающего активным сопротивлением *R*, индуктивностью *L* и емкостью *C* в общем случае может быть записано в виде:

$$Z = Z_m \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\omega} = R + \mathbf{i}\cdot\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) = R + \mathbf{i}\cdot\left(X_L - X_C\right) \text{ [Ом]}. \qquad (39)$$

Вычислим комплексные сопротивления *Z1..Z6* для всех участков цепи:





$$Z1 = R1 + \mathbf{i}\cdot\omega\cdot L1 - \frac{\mathbf{i}}{\omega\cdot C2}; \qquad Z2 = R3; \qquad Z3 = -\frac{\mathbf{i}}{\omega\cdot C2};$$

$$Z4 = R2 - \frac{\mathbf{i}}{\omega\cdot C3}; \qquad Z5 = R4 + \mathbf{i}\cdot\omega\cdot L2; \qquad Z6 = R5$$

Произвольно выберем направления протекания токов $i_1..i_6$ в сегментах схемы (на рисунке выше обозначены красными стрелками) и направления обхода контуров. По законам Кирхгофа в выбранных контурах и узлах цепи выпишем уравнения для поиска токов $i_1..i_6$:

$$\begin{cases} (I): & i_1\cdot Z1 + i_2\cdot Z2 = 0 \\ (II): & i_2\cdot Z2 + i_3\cdot Z3 + i_5\cdot Z5 + i_6\cdot Z6 = 0 \\ (III): & i_5\cdot Z5 + i_4\cdot Z4 = E1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1): & i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ (2): & -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \\ (3): & i_4 - i_5 + i_6 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу комплексных сопротивлений системы Z и вектор внешних воздействий E:

$$Z := \begin{pmatrix} R1 + i\cdot\omega\cdot L1 + \frac{-i}{\omega\cdot C2} & R3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R3 & \frac{-i}{\omega\cdot C1} & 0 & R4 + i\cdot\omega\cdot L2 & R5 \\ 0 & 0 & 0 & R2 + \frac{-i}{\omega\cdot C3} & R4 + i\cdot\omega\cdot L2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений – значения токов $i_1..i_6$, протекающих в сегментах схемы в виде комплексных значений [А]:

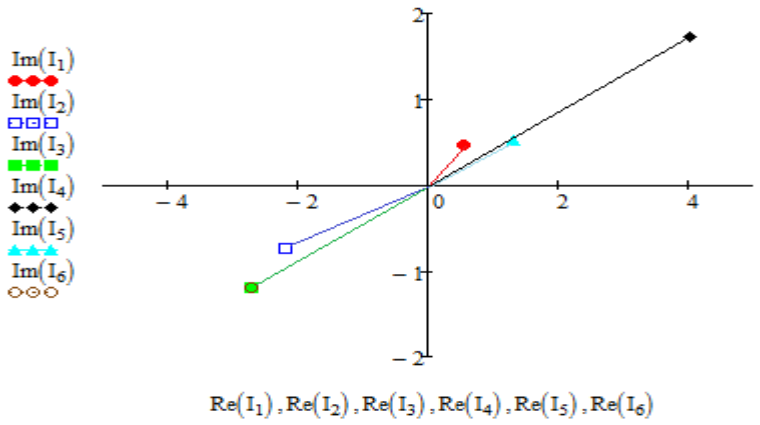
$$I := Z^{-1}\cdot E \qquad I = \begin{pmatrix} 0.5296826 + 0.4697468i \\ -2.1867138 - 0.7353172i \\ -2.7163964 - 1.2050641i \\ 4.0191 + 1.7244382i \\ 1.3027035 + 0.5193741i \\ -2.7163964 - 1.2050641i \end{pmatrix}$$

$$i1(t) := |I_1|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_1)) \qquad i4(t) := |I_4|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_4))$$

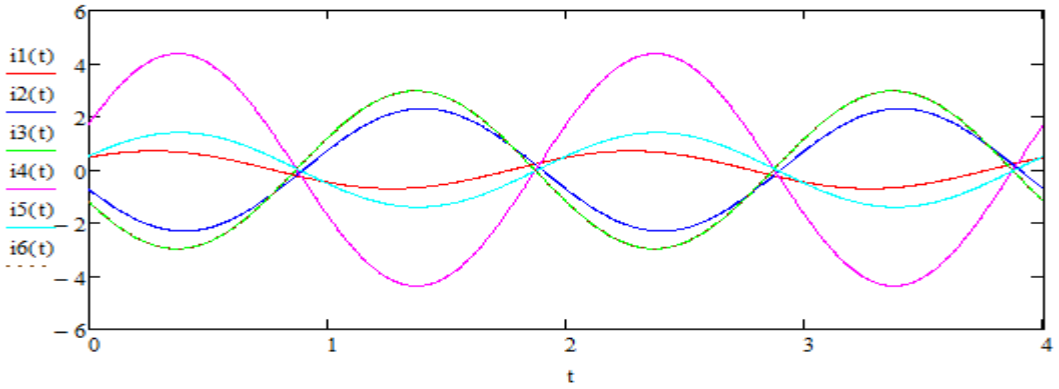
$$i2(t) := |I_2|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_2)) \qquad i5(t) := |I_5|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_5))$$

$$i3(t) := |I_3|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_3)) \qquad i6(t) := |I_6|\cdot\sin(\omega\cdot t + \arg(I_6))$$

На рисунке ниже изображена векторная диаграмма токов:



Изобразим токи в виде функции от времени и выведем их на график [А]:



Проверим правильность нахождения токов по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$
$$-I_3 - I_4 + I_5 = 0$$
$$-I_1 + I_2 - I_6 = 0$$
$$I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$tt := 1.7$$
$$i1(tt) - i2(tt) + i3(tt) = 0$$
$$-i3(tt) - i4(tt) + i5(tt) = 0$$
$$-i1(tt) + i2(tt) - i6(tt) = 0$$
$$i4(tt) - i5(tt) + i6(tt) = 0$$

Можно видеть, что сумма токов в узлах цепи равна нулю для любого момента времени (здесь произвольно выбрано *tt=1.7 с*).

Вычислим напряжения на активных и реактивных элементах цепи переменного тока [В]:

$$U := \begin{pmatrix} R1 \cdot I_1 \\ i \cdot \omega \cdot L1 \cdot I_1 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C2} \cdot I_1 \\ R3 \cdot I_2 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C1} \cdot I_3 \\ R5 \cdot I_6 \\ R2 \cdot I_4 \\ R4 \cdot I_5 \\ i \cdot \omega \cdot L2 \cdot I_5 \\ \frac{-i}{\omega \cdot C3} \cdot I_4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 15.8904773654 + 14.0924050865i \\ -0.0073750253 + 0.0083160165i \\ 5.9840361302 - 6.7475487751i \\ -21.8671384702 - 7.3531723279i \\ -0.7675567319 + 1.7301888063i \\ -81.4918927759 - 36.1519220702i \\ 200.9549987222 + 86.2219088809i \\ 104.2162838865 + 41.549928689i \\ -0.0896959086 + 0.2249769028i \\ 54.9184132999 - 127.9968144727i \end{pmatrix}$$

Изобразим напряжения в виде функции от времени и выведем их на график [В]:

$uE1(t) := E1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

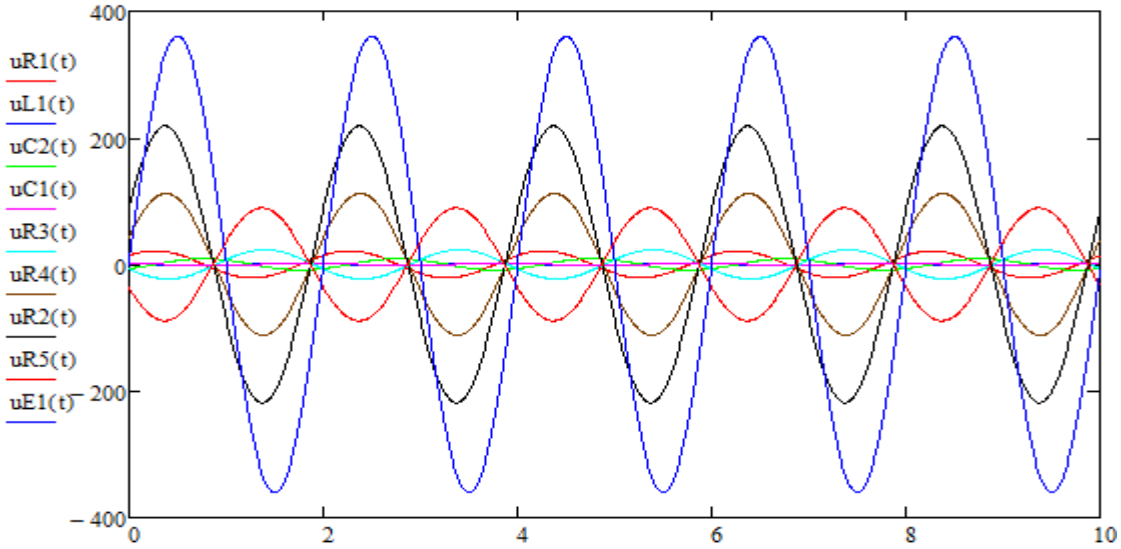
$uR1(t) := |U_1| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_1))$ $\quad$ $uR5(t) := |U_6| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_6))$

$uL1(t) := |U_2| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_2))$ $\quad$ $uR2(t) := |U_7| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_7))$

$uC2(t) := |U_3| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_3))$ $\quad$ $uR4(t) := |U_8| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_8))$

$uR3(t) := |U_4| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_4))$ $\quad$ $uL2(t) := |U_9| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_9))$

$uC1(t) := |U_5| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_5))$ $\quad$ $uC3(t) := |U_{10}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_{10}))$



Проверим правильность нахождения напряжений по второму закону Кирхгофа:

$uR1(tt) + uL1(tt) + uR3(tt) + uC2(tt) = 0$

$uC1(tt) + uR3(tt) + uR5(tt) + uL2(tt) + uR4(tt) = 0$

$uR4(tt) + uL2(tt) + uR2(tt) + uC3(tt) - uE1(tt) = 0$

Можно видеть, что сумма напряжений в контурах цепи равна сумме ЭДС источника для произвольного момента времени.

Рассчитаем баланс мощностей:

$Sgen := E1 \cdot I_4$ $\qquad$ $Sgen = 1446.875991 + 620.797744i$

$$Ppotr := (|I_1|)^2 \cdot R1 + (|I_4|)^2 \cdot R2 + (|I_2|)^2 \cdot R3 + (|I_5|)^2 \cdot R4 + (|I_6|)^2 \cdot R5 = 1446.875991$$

$$Qpotr := (|I_1|)^2 \cdot \omega \cdot L1 + (|I_1|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C2} + (|I_3|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C1} + (|I_5|)^2 \cdot \omega \cdot L2 + (|I_4|)^2 \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C3} = -620.797744$$

Можно видеть, что полная мощность источника *Sgen* [ВА] в комплексном виде имеет две составляющие – активную (вещественная часть) и реактивную (мнимая часть). Активная мощность потребителей равна *Ppotr* [Вт], а реактивная мощность потребителей – *Qpotr* [ВАр].

Результаты расчетов демонстрируют полное совпадение потребленной и сгенерированной активной и реактивной мощностей. Это подтверждает правильность расчетов и неизменность закона сохранения энергии в природе.

© Михальченко С.Г., 2017
© Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР), 2017